فصل سوم

طراحی در حوزهٔ فرکانس
یا طراحی با نگاه رنگی

۳-۱- مقدمه

در این فصل مبنای ما در اختیار داشتنِ یک تابع تبدیلِ رنگی از سامانهٔ تحت هدایت، به عنوان شناخت ما از آن است. همان گونه که در گفتگوی کلی دربارهٔ طراحی گذشت، داستان از درک دو نکتهٔ به هم پیوستهٔ اساسی آغاز می‌گردد ۱- ما در حلقهٔ هدایت فقط می‌توانیم به ساختنِ H بپردازیم ۲- آنچه در طراحی از اهمیت بسیار ویژه برخوردار است، بهرهٔ حلقه یعنی GH است و از روی آن است که همهٔ ویژگی‌های دیگر حاصل می‌گردد. یعنی درست است که فقط به H دسترسی داریم ولی آن را طوری می‌سازیم که GH به گونهٔ مورد نظر درآید.

پس روشن است که ما باید رابطهٔ بینِ بهرهٔ حلقه GH و خود حلقه $(1+GH)^{-1}$ یا $GH(1+GH)^{-1}$ را به خوبی دریابیم. یعنی باید دریابیم که اگر مثلاً بهرهٔ حلقه چنین باشد آنگاه حلقهٔ هدایت چنان خاصیتی خواهد داشت. این مهم، اصلی‌ترین موضوعاتِ ما را تشکیل می‌دهد.

پس لازم است به ازایِ رفتارهایِ گوناگونِ مورد نظر، رابطهٔ بین این دو تابع تبدیل به دست آید. برای این منظور نیز لازم است موضوعاتِ مربوط به رفتارشناسی در حوزهٔ فرکانس دوباره مرور و برای ما مهم شوند. در واقع برای اینکه حلقهٔ هدایتی ما رفتارِ مطلوب را داشته باشد باید به ازایِ ویژگی‌های رفتاریِ گوناگون، رفتارِ مطلوب مشخص گردد.

شاید گفته شود که پر واضح است رفتار مطلوبِ هدایتی این است که «کن فیکون» باشد. به زبان ریاضی یعنی y همهٔ فرکانس(رنگ)هایِ y_d را بدون کم و کاست ارائه دهد و با آن تفاوتی نداشته باشد. در واقع یعنی تابع تبدیلِ از یکی به دیگری واحد باشد و برای تمامیِ فرکانس‌ها دارایِ بهرهٔ یکسانِ واحد باشد. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود تابع تبدیل تمام‌گذر و بدون هیچ اعوجاج فاز است.

خوب! نکته این است که این مطلوب امکان ندارد و ما باید به برخی ویژگی‌هایِ ممکنِ رفتاری قانع باشیم! این قناعت ما را به یک رفتارِ مطلوب رهنمون می‌کند و به این ترتیب طراحیِ H نهایتاً ممکن می‌شود.

۳-۲- رفتارشناسی در حوزهٔ فرکانس (یادآوری)

پیشتر باید آشنا شده باشید[۱] که رفتارشناسیِ رنگی در سامانه‌های خطی بسیار ساده و روان است. چراکه کافیست بدانیم بهرهٔ نظیر هر رنگ چقدر است؟ این سادگی از یک ویژگیِ بسیار بسیار مهم و اساسی ناشی می‌شد، در سامانه‌های خطی خاصیت تک‌رنگیِ برایِ رنگ‌های ویژه(نمایی‌ها چه حقیقی و چه موهومی و چه مختلط) وجود دارد. یعنی اگر ورودی، هر تک‌رنگِ ویژه باشد، تمامیِ سیگنال‌هایِ دیگر از جمله خروجی نیز از همان تکرنگِ ویژه خواهند بود و لذا در رابطهٔ ورودی و خروجی(رفتارشناسیِ ورودی-خروجی) کافیست بدانیم، بهرهٔ مربوط به هر تکرنگِ ویژه چقدر است! و این همهٔ اطلاعات لازم برای شناختنِ کامل آن سامانهٔ خطی است.

[۱] معمولاً این موضوع در مباحث درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها بیان می‌شود.

به بیانی که در آن این بهرهٔ مختلط به ازایِ همهٔ فرکانس(تک‌رنگ)ها مشخص گردد، اصطلاحاً پاسخِ فرکانسیِ سامانه گفته شد. پاسخ فرکانسی می‌تواند به صورت‌های گوناگونی بیان شود. یکی از پرکاربردترینِ این صورت‌ها نمایشِ بودی است و لازم است به طور کامل با آن آشنا باشید. به همین منظور در پیوست ۳ به صورت مشروح به بیان شیوه به دست آوردن این نمایش و نیز چگونگی استفاده از آن پرداخته‌ایم.

۳-۲-۱- پایداری

در همهٔ نمایش‌هایی که برای پاسخ فرکانسی سامانه ها ارائه می‌شود، فرض می‌گردد که ورودی از رنگ‌هایِ اصلیِ روی محور موهومی تشکیل شده است و بهرهٔ مربوط به این رنگ ها داده می‌شود. در واقع فرض می‌گردد که سامانه دارایِ ورودی و خروجیِ فوریه‌دار است و موضوعِ سیگنال‌های لاپلاس‌دار در نظر گرفته نمی‌شود.

چراییِ این فرض، بسیار ساده است. در واقع سامانه‌ها عموماً هنگامی به کار می‌روند که پایدار هستند، اگر هم پایدار نباشند ابتدا سعی در پایداری آنها داریم و سپس آنها را استفاده می‌کنیم. به این ترتیب تحلیلِ پایدار شده‌شان مد نظر است و به همین دلیل می‌گوییم برایِ سامانه‌هایِ پایدار یا پایدارشده، کار با تک‌رنگ‌هایِ اصلیِ روی محور موهومی کفایت می‌کند.

در تشریح این کفایت باید گفت سامانه‌های ناپایدارِ خطی به زبانِ رنگی، سامانه‌هایی هستند که در آن‌ها حداقل یک تکرنگِ محدود وجود دارد که بهرهٔ مربوطش بینهایت باشد. لذا این سامانه با تعریفِ ورودی محدود- خروجی محدود، ناپایدار محسوب خواهد شد. در میانِ تکرنگ‌ها نیز فقط آنهایی که روی محور موهومی هستند، کراندار و محدودند. به این ترتیب اگر ناحیهٔ

همگراییِ مربوطه شاملِ محور موهومی باشد، نشان از آن دارد که سامانهٔ مربوط نیز پایدار است چراکه سامانه برای همهٔ این تکرنگ‌ها همگرا است و لذا بهره‌ای محدود دارد. برعکس حتی اگر به ازایِ فقط یک نقطه از این محور خروجی همگرا نباشد نشان از آن است که حداقل برای آن تکرنگ خاص، بهره بینهایت است و لذا مطابق تعریف، سامانه ناپایدار است.

خلاصهٔ بحثِ بالا به همان نتایجی دربارهٔ پایداریِ یک تابع تبدیل منجر می‌گردد که شما در بحثِ حوزهٔ زمان نیز با آن آشنا شدید. تابع تبدیلی پایدار است که تمامیِ قطب‌های آن سمت چپی باشند تا ناحیهٔ همگرایی شاملِ محور موهومی گردد.

در فصلِ اول تعریف جامعی برای پایداری بیان گردید. روشن است که اگر سامانهٔ نهایی ـ که شما به عنوانِ سامانهٔ هدایتی‌تان ارائه می‌دهید ـ رفتاری ناپایدار داشته باشد، به درد نخواهد خورد. این به درد نخوردن چند وجه مشخص دارد. اولاً سیگنالِ مطلوبِ y_d به هیچ وجه دنبال نخواهد شد، به معنی دیگر خطا، بزرگ و بزرگ‌تر خواهد شد. ثانیاً به ازایِ کوچکترین خطایی که در الگویِ G به وجود آید (که یعنی ما dها را داریم) هر چند محدود، باز هم خطاهای فراوان به وجود خواهند آمد. در واقع حلقهٔ هدایت، خود ذاتاً تولید کنندهٔ رنگ‌هایِ با اندازهٔ بسیار بزرگ است.

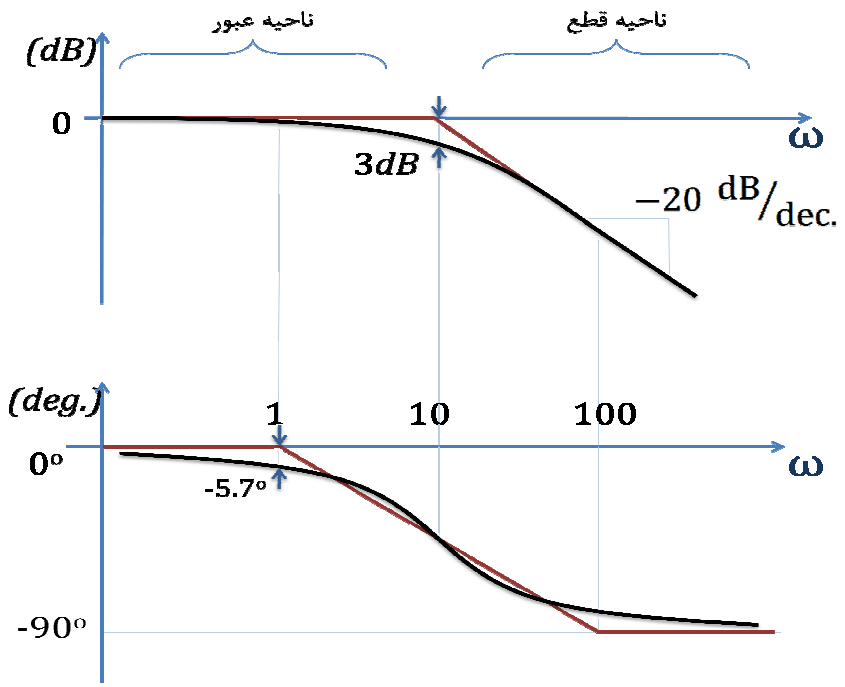
با توجه به آنچه در مقدمهٔ فصل گذشت، لازم است از رویِ رفتار رنگیِ بهرهٔ حلقه، بتوان رفتارِ رنگیِ حلقه را تشخیص داد. مثلاً برای پایداری، لازم است ریاضیاتی را یاد بگیریم که با استفاده از آن با داشتن رفتار رنگیِ بهرهٔ حلقه بتوان در مورد پایداری و ناپایداریِ حلقه، داوری نمود. هر چند در این باره، به کمک نمایش بودی نیز، هنگام بحثِ طراحی، سخنی خواهیم داشت ولی آن ریاضیاتی که بی کم و کاست، پاسخگوی این نیاز است، به کمکِ نمایشِ قطبیِ پاسخ فرکانسی، توسعه داده شده است و در آنجا با توجه به نمایشِ قطبیِ بهرهٔ حلقه و تعداد قطب‌های ناپایدارِ آن،

صریحاً به داوری دربارهٔ تعداد قطب‌های ناپایدارِ حلقه پرداخته می‌شود. چون این ریاضیات عموماً فقط برای داوری دربارهٔ پایداری است و در ادامهٔ بحثِ ما استفادهٔ چندانی ندارد، در پیوستِ۳ به آن پرداخته شده است.

۳-۲-۲- پهنای باند

به ناحیه‌ای از رنگ‌ها، که سامانه تقریباً کاری به آنها ندارد و اصطلاحاً آنها را بی‌کم و کاست عبور می‌دهد، باندِ عبور گفته می‌شود. ناحیه‌ای را که سامانه، رنگ‌های آن را بسیار تضعیف می‌کند اصطلاحاً باند قطع می‌نامند. البته بین این دو ناحیه نیز جایی است که به هر حال نه چندان عبورِ خوبی است و نه چندان جلوگیریِ خوبی. در سامانه‌های هدایتیِ متداول، عموماً علاقه‌مند که باندِ عبور، از فرکانسِ بسیار پایین (صفر) شروع شود و تا جای مشخصی ادامه یابد. البته عموماً می‌دانیم که از جایی به بعد نیز عبور ممکن نیست و لذا چنانچه بالاتر نیز اشاره شد، باید به یک فرکانسی نیز قانع بود.

به فرکانسِ بیشینهٔ عبوری که به هر حال به آن قانع می‌شویم، اصطلاحاً پهنای باند سامانه گفته می‌شود. برای اینکه تعریفِ ما به لحاظ ریاضی نیز دقیق باشد، به تقلید از سامانهٔ مرتبهٔ اولِ ساده، فرکانسی را که در آن بهرهٔ سامانه، $3dB$ پایین‌تر از بزرگیِ بهره در باند اصلیِ عبور، می‌گردد، پهنای باند عبور سامانه و یا به طور خلاصه پهنای باند می‌نامند. به شکل ۳-۱ توجه کنید.



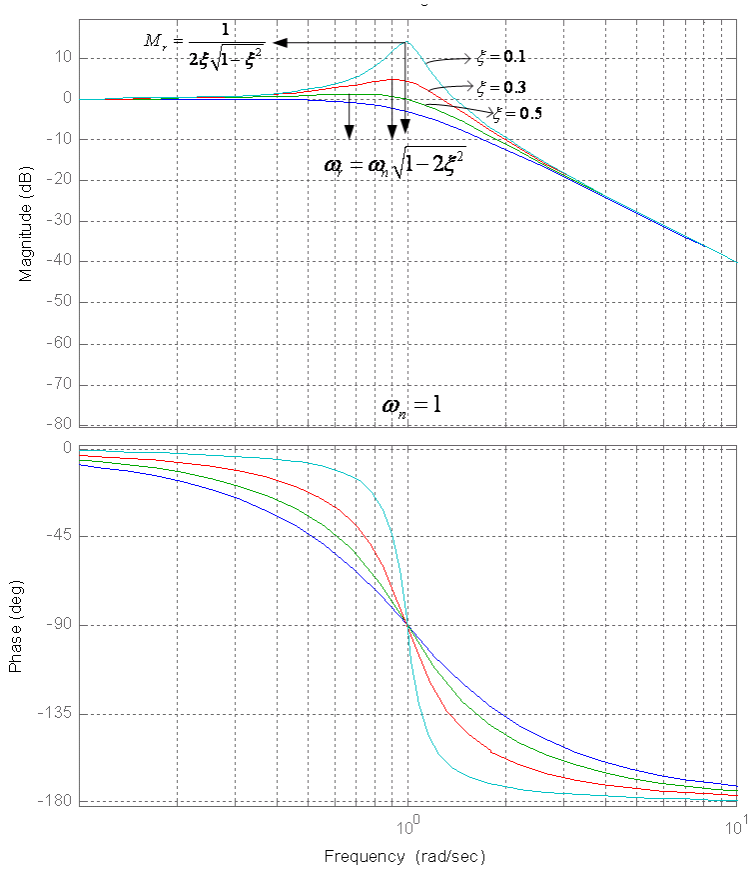
شکل ۳-۱- نمایش بودی سامانه مرتبه اول با یک قطب در ۱۰؛ همان طور که در شکل دیده می شود پهنای باند همان فرکانس اصلی سامانه است.

همان گونه که در شکل ۳-۱ در سامانه مرتبهٔ اول دیده می‌شود، پهنای باند، همان فرکانس اصلی (عکس ثابت زمانی) است. پس پهنایِ باندِ بزرگتر، متناظر با سرعتِ بیشتر در نگاه تغییری(زمانی) است.

۳-۲-۳- فرکانس تشدید

ممکن است در ناحیهٔ گذار، فرکانسی باشد که به ازای آن بهره از مقدار معمولِ ناحیهٔ عبور، به طور قابل توجهی بزرگتر شود. این فرکانس، اصطلاحاً فرکانسی است که در آن سامانه تا حدودی دچار تشدید شده است. این ویژگی عموماً مطلوب نیست!

این پدیده در سامانه‌های مرتبهٔ اول دیده نمی‌شود و مختصِ سامانه‌هایِ مرتبهٔ دوم و بالاتر است. در شکل ۳-۲ پاسخ فرکانسی سامانهٔ مرتبهٔ دوم را به ازای چندین ضریب میراییِ نوسانات، ملاحظه می‌کنید. در این شکل، روابطی برای فرکانس‌های تشدید و غیره به ازایِ ضریبِ میرایی نشان داده شده‌اند. فرکانسِ تشدید در حوزهٔ فرکانس متناظر است با رفتار نوسانی در حوزهٔ زمان، در بررسی سامانه های هدایتی در حوزه زمان نیز دیدیم که رفتار نوسانی نیز مطلوب نیست.



شکل ۳-۲- پاسخ فرکانسی سامانه مرتبه دوم $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ به ازای مقادیر مختلف ضریب میرایی نوسانات.

۳-۳- رابطهٔ رنگیِ بینِ بهرهٔ حلقه و حلقهٔ هدایت

بحثی که در این قسمت می‌آید در عین سادگی، اساسِ فهم همهٔ نکاتِ طراحی در نگاه رنگی است و به همین دلیل مقدمه‌ای اساسی در طراحیِ حوزهٔ فرکانس به شمار می‌رود. لذا همین ابتدا تأکید فراوان در توجه و یادگیریِ کامل آن داریم. داستان، همان رابطهٔ بین رفتار فرکانسیِ GH با $GH(1+GH)^{-1}$ است. خواهیم دید این موضوعِ اصلی در طراحی در نگاه رنگی، بسیار ساده و روان ولی پرکاربرد، همه‌جانبه و گویا پیش می‌رود.

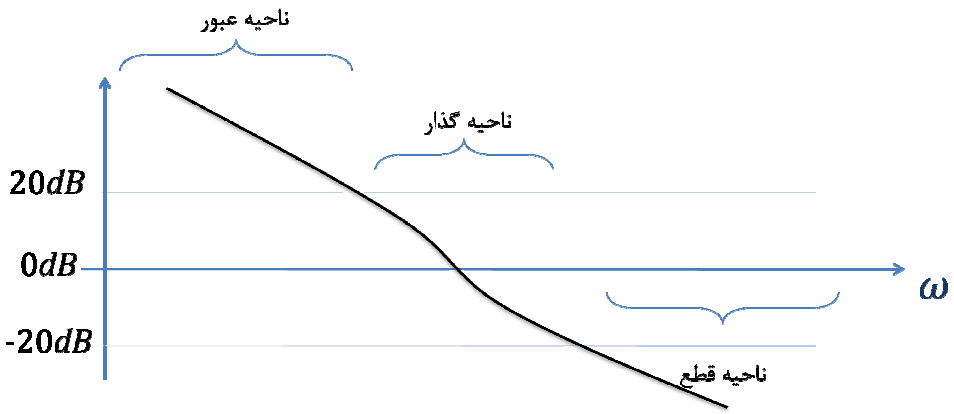
از قاعدهٔ کلیِ اقدام علیهِ خطایِ هر چه شدیدتر، روشن است که اگر می‌خواهید رنگی در خروجی دست نخورده ظاهر شود و همان گونه که در y_d درخواست شده است بدون خطا در خروجیِ y وارد گردد، لازم است بهرهٔ اقدام علیهِ خطایِ مربوطه‌اش نیز تا جایی که ممکن است بزرگ باشد. یعنی لازم است اندازهٔ پاسخ فرکانسیِ آن فرکانس در بهرهٔ حلقه، هر چه بزرگتر باشد.

به لحاظ ریاضی نیز به آسانی دیده می‌شود که در هر فرکانس هر چه اندازهٔ GH بزرگتر از 1 باشد، اندازهٔ خطا در آن فرکانس بسیار کوچکتر می‌شود و اندازهٔ تابع تبدیلِ از خروجی مطلوب به خروجی نیز به واحد نزدیک و نزدیکتر می‌گردد. با توجه به این نکته می‌توان نواحیِ فرکانسی را به سه بخش کلی تقسیم نمود:

- ناحیه‌ای که توانسته‌ایم بهرهٔ حلقه را به اندازهٔ کافی بزرگتر از واحد کنیم. در نتیجه این رنگ‌ها و فرکانس‌ها با خطایِ قابل قبولی در خروجی پیروی خواهند شد. به همین دلیل این بخش را ناحیهٔ عبور یا پیروی می‌نامیم.

- ناحیه‌ای که بر عکس ناحیه عبور، چون نتوانسته‌ایم (و یا نخواسته‌ایم) ورودی پیروی گردد، بهرهٔ حلقه را به اندازهٔ کافی پایین‌تر از واحد نگاه داشته‌ایم. لذا می‌توان این را ناحیهٔ عدم پیروی یا قطع نامید.
- ناحیهٔ سوم جایی است بین دو ناحیه قبل که ناچار از آن گذر خواهیم داشت. در این ناحیه نه بهره آنقدر بزرگ است که بتوان آن را پیروی کردن دانست و نه بهره آنقدر کوچک است که در ناحیه قطع باشد. بلکه در این ناحیه اندازه حول و حوش واحد و یا به ویژه، خودِ واحد می‌شود.

برای درک بهتر در شکل زیر این سه بخش نمایش داده شده‌اند.



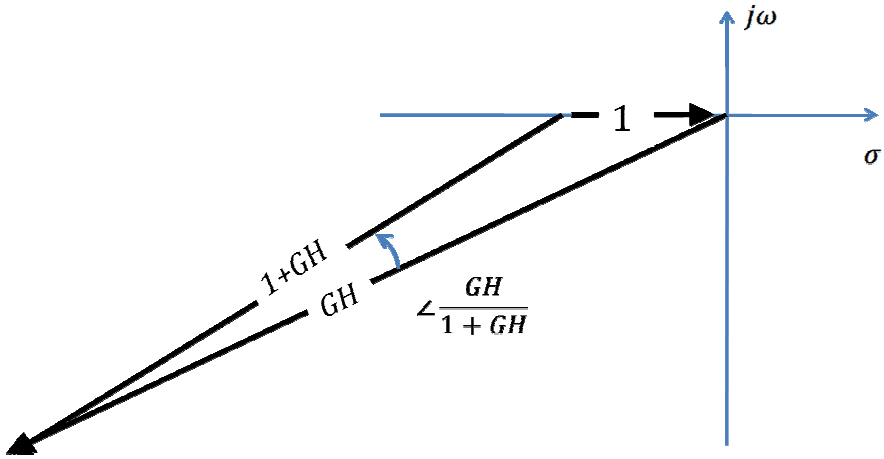
شکل ۳-۳- نمایش نواحی عبور، گذار و قطع با توجه به تغییرات اندازه بهره حلقه.

برای ریاضی‌تر دیدنِ این سه ناحیه با کمک نمایش قطبیِ پاسخ فرکانسی سعی می‌کنیم رابطهٔ بینِ بهرهٔ حلقه و حلقه را به دست آوریم و هر یک از این سه ناحیه را جداگانه بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا فرض کنید اندازهٔ بهرهٔ حلقه GH، مثلاً حدود 10 باشد (یعنی در ناحیه عبور)

و فازش را فعلاً دلخواه بگیرید. شکل ۳-۴ به خوبی نشان می‌دهد که مستقل از فازِ بهرهٔ حلقه و با تکیه بر اندازهٔ آن، دربارهٔ اندازه و فازِ حلقه می‌توان نوشت:

$$\frac{10}{11} < \left|\frac{GH}{1+GH}\right| < \frac{10}{9} \qquad (۱-۳)$$

$$-6° < \angle\frac{GH}{1+GH} < 6° \qquad (۲-۳)$$



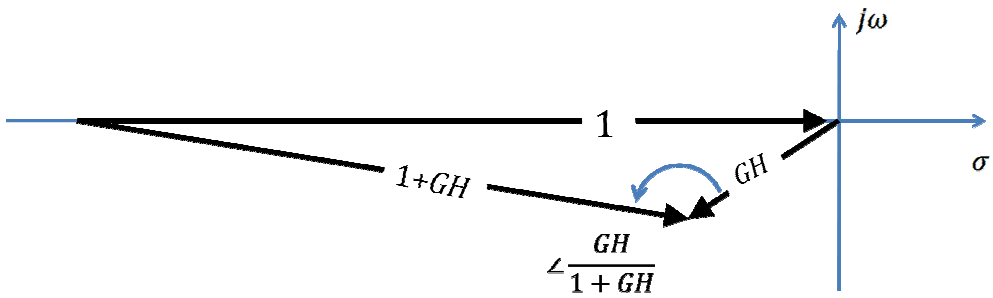
شکل ۳-۴- در ناحیه عبور مستقل از فاز بهره حلقه، نتیجه حلقه اندازه ای در حدود واحد خواهد داشت و فاز آن نزدیک به صفر است.

ملاحظه می‌کنید که اندازهٔ نتیجهٔ حلقه، حدودِ واحد است یعنی تقریباً این فرکانس‌ها پیروی می‌گردند و عبور داده می‌شوند. جالب‌تر اینکه، فاز نیز، نزدیکِ صفر است و لذا چندان تأخیر یا تقدم فازی هم در این فرکانس‌ها در خروجی دیده نمی‌شود.

مشابه همین تحلیل در شکل ۳-۵ برای ناحیهٔ قطع آورده شده است. چنانچه ملاحظه می‌کنید در اینجا دیده می‌شود که با فرض بهره حلقه کوچکتر از *0.1*، مستقل از فاز بهره حلقه اندازهٔ حلقه نزدیکِ صفر است، یعنی تضعیف زیادی اتفاق می‌افتد. البته فاز حلقه به فاز بهرهٔ حلقه نزدیک است و کاملاً تحتِ تأثیر آن قرار دارد.

$$0.09 = \frac{0.1}{1.1} < \left|\frac{GH}{1+GH}\right| < \frac{0.1}{0.9} = 0.11 \qquad (۳-۳)$$

$$\angle GH - 6° < \angle\frac{GH}{1+GH} < \angle GH + 6° \qquad (۳-۴)$$

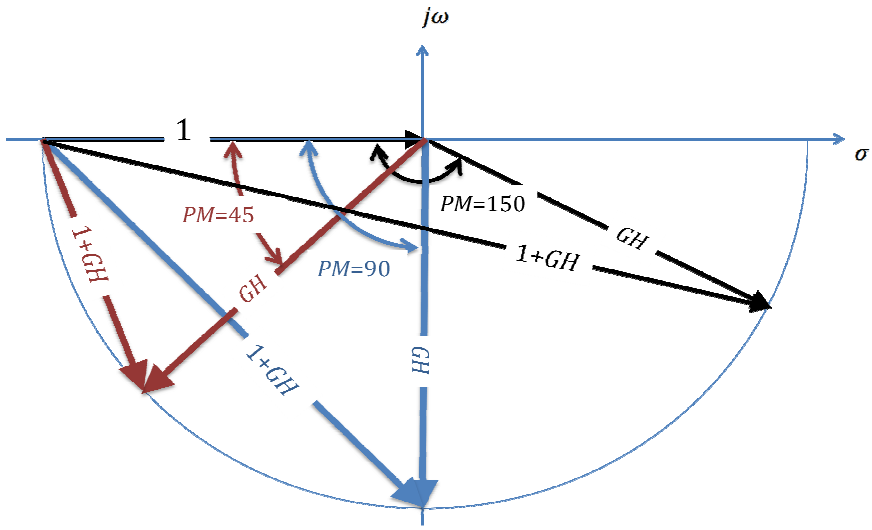


شکل ۳-۵- در ناحیه قطع $1+GH$ از GH بسیار بزرگتر می شود و اندازه تابع تبدیل حلقه به صفر نزدیک می شود. فاز حلقه هم به فاز GH نزدیک و متأثر از آن است.

تمرین ۳-۱-

این شکل‌ها را برای هنگامی که عددِ 10 را با 3 نیز جایگزین کنیم، محاسبه و رسم کنید. آیا می‌توان نتیجه گرفت که: عمدهٔ مخاطره، هنگامی است که این عدد واحد می‌شود که داوری به آسانیِ دو ناحیهٔ دیگر نیست و فازِ بهرهٔ حلقه مهم می‌گردد.

و اما هنگامی که اندازهٔ پاسخ فرکانسی واحد(1) می‌گردد درست برعکسِ دو ناحیهٔ عبور و قطع، فازِ بهرهٔ حلقه در مقدار اندازه حلقه بسیار مهم می‌شود. در این شرایط اساساً فاز است که تکلیف داستان را روشن می‌کند. درحالی که در دو ناحیهٔ قبل فاز تقریباً بی‌اثر یا کم اثر است. برای درک بیشتر آنچه در این ناحیه رخ می‌دهد، به شکل ۳-۶ دقت کنید. در این شکل اندازه و فاز $1+GH$ را در مقایسه با فاز GH می‌بینید، در حالی که اندازه GH برابر با واحد در نظر گرفته شده است.



شکل ۳-۶- در ناحیه گذار جایی که اندازه بهره حلقه برابر با یک می‌شود اندازه و فاز نتیجه حلقه به شدت متأثر از فاز بهره حلقه است.

با توجه به شکل ۳-۶، در این فرکانس (که فرکانسِ گذرِ اندازهٔ واحد نامیده می‌شود) از رویِ فازِ بهرهٔ حلقه رابطهٔ زیر برایِ نتیجهٔ حلقه به دست می‌آید.

$$\text{حلقه} = \frac{0.5}{sin(0.5PM)} \angle \frac{PM-180^\circ}{2} \qquad (۵-۳)$$

$$PM = \text{فازِ بهرهٔ حلقه} + 180^\circ \qquad (۶-۳)$$

در عبارت (۳-۶) PM[۱] نیز معرفی شده است که عبارتست از مقدار فازی که تا رسیدن به فاز -180° باقی مانده! یعنی اگر به این مقدار، در سامانه تأخیرِ فاز به وجود آید به فازِ -180° می‌رسیم. این مقدار را «حد فاز» یا «حاشیهٔ فاز» می‌گویند. دلیل این نام‌گذاری کمی جلوتر روشن می‌شود.

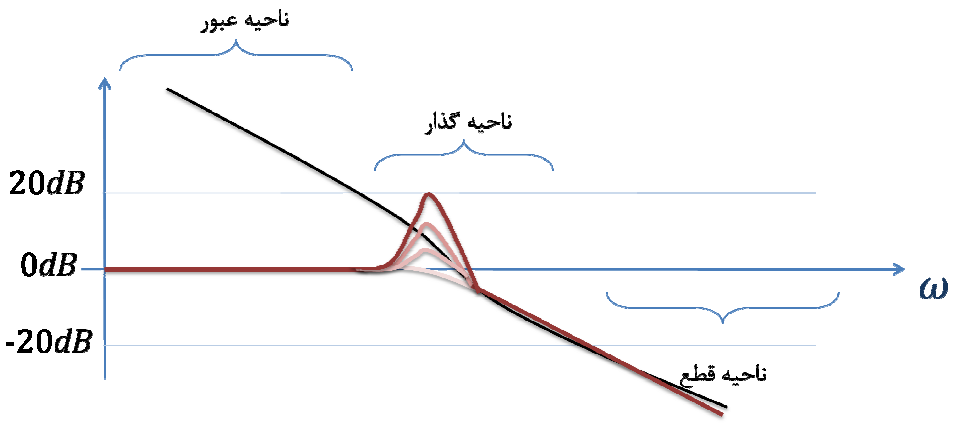
برای حد فازهای پایین‌تر از 90° می‌توان عبارت تقریبی زیر را نیز از بالا به دست داد:

$$\left|\text{حلقه}\right| \approx \frac{1}{PM} \quad (PM \text{ بر حسب رادیان}) \qquad (۷-۳)$$

در شکل ۳-۷ آنچه در سه قسمتِ بالا گذشت، حسبِ مقادیرِ گوناگونی که حد فاز می‌تواند داشته باشد، به صورت یکجا آورده شده است. در نمایشِ بودی نشان داده شده در این شکل، فقط اندازهٔ بهرهٔ حلقه آورده شده است چراکه دیدیم فازِ آن در نتیجهٔ حلقه برای دو ناحیهٔ عبور و عدم عبور مهم نیست و فقط در ناحیهٔ گذار اهمیت پیدا می‌کند. ولی برای آنکه شکل کامل باشد، نتیجهٔ حلقه در ناحیهٔ گذار به ازایِ حدفازهای گوناگون، رسم شده است تا دیدِ ترسیمیِ بهتری داشته باشید.

---

[۱] *Phase margin*



شکل ۳-۷- نمایش بودی اندازه بهره حلقه (سیاه) و نتیجه حلقه (قرمز)؛ در باند عبور مستقل از اندازه و فاز بهره حلقه، اندازه حلقه برابر با ۱ ($0dB$) و در باند قطع تقریبا معادل اندازه بهره حلقه می‌باشد، در ناحیه گذار بسته به مقادیر مختلف فاز بهره حلقه (در این شکل نشان داده نشده است) اندازه نتیجه حلقه تغییر می‌کند.

به خوبی دیده می‌شود که هر چه حد فاز به صفر نزدیک می‌شود، به همان میزان سامانهٔ حلقه به تشدید نزدیکتر می‌شود تا جایی که در حد فازِ صفر، تشدیدِ کامل صورت می‌گیرد و در واقع اندازهٔ حلقه بینهایت می‌گردد و این خود حکایت از ناپایداریِ حلقه می‌کند. به همین دلیل می‌گوییم حد فاز صفر مرزِ پایداری و ناپایداریِ حلقه است.

چه رخ داده است که به سمت ناپایداری رفته‌ایم؟! چرا حد فاز صفر، یعنی فازِ $-180°$، تا این حد کار را خراب می‌کند!؟ روشن است، کافیست توجه کنید که فازِ $-180°$ در بهره حلقه به معنای منفی شدنِ خروجی نسبت به ورودی در فرکانس گذر است، در حقیقت در اینجا به جایِ اقدام علیهِ خطا، دقیقاً در حال کمک و ازدیادِ خطا هستیم. به همین دلیل است که در این فرکانسِ خاص، نه تنها خطا کاهش نمی‌یابد بلکه مرتباً افزایش نیز می‌یابد. همین ناپایداریِ حلقهٔ هدایت است!!!

البته پیش از ناپایداریِ کامل می‌بینیم که در این ناحیه، به شکل نامطلوبی انـدازه رو بـه افزایشِ است. ما نمی‌خواستیم یک فرکانسی بسیار بزرگتر از بقیه ظاهر گردد ولی می‌بینیم که بـه طور ناخواسته‌ای این اتفاق افتاد. توجه دارید که برای اینکه خروجی هـر چـه بیشـتر بـه خروجـیِ مطلوب نزدیک باشد، در فرکانس‌هایی که خروجی مقدار مطلوب دارد، نه شایسته است که تضعیف رخ دهد و نه خوب است که تقویت اتفاق بیفتد.

تمرین ۳-۲-

ببینید چگونه در تحلیل‌های بالا بینِ بهرهٔ حلقه (یعنی چگونگیِ اقدام علیه خطا) و نتیجهٔ حلقه، رابطه برقرار نموده‌ایم. همهٔ آنچه دیدید، دست‌مایهٔ ماست برای طراحی! در این باره خودتان پیش از اینکه بقیهٔ نوشته را بخوانید، تفکر کنید و سعی کنید نظریه بدهید که برای طراحی چه باید کرد؟!

۳-۳-۱- اصل و اساسِ طراحی

ابتدا لازم است بدانیم چه فرکانس‌هایی باید عبور کنند و تا چقدر خطا، در این عبور دادن، مجاز است و باید رعایت گردد. اگر دربارهٔ y_d هیچ آگاهی‌ای داده نشده است و به طور کلی از هر فرکانسی به طور یکسان می‌تواند در آن وجود داشته باشد، پس باید سعی گردد پهنای باند ما هـر چه بزرگتر باشد. اما عموماً باید به محدوده‌هایی قانع باشیم.

به هر حال پس از تعیینِ محدودهٔ فرکانسیِ عبور، لازم است بهـرهٔ حلقـه در ایـن ناحیـه بزرگ باشد. اگر سامانهٔ تحت هدایت در این ناحیه، خودش، به اندازهٔ کافی بزرگ است که خوب! و

اگر نه باید به وسیلهٔ جبران‌ساز H، بزرگش کنیم. از طرف دیگر باید مراقب بود به هر حال در ناحیهٔ گذار، تشدید و یا ناپایداری به وجود نیایند. پس اصلِ اساسی می‌شود: **بالا بردنِ اندازهٔ بهرهٔ حلقه در فرکانس‌های مورد نیاز و به اندازهٔ مورد نیاز ولی با مراقبت از فاز در ناحیهٔ گذار!!**

۳-۴- ورود به جزئیات طراحی

در طراحی به غیر از پهنای باند و موضوع تشدید و پایداری، خطایِ در ناحیهٔ عبور هم مطرح است. عموماً این خطا در فرکانس‌های بسیار پایین و به ویژه در فرکانسِ صفر مهم می‌شود. اینکه در فرکانس صفر چقدر با خطا مقابله می‌شود، معیار این است که کلاً در ناحیهٔ عبور و در فرکانس‌های پایین چقدر خطا رو به کاهش است. به خوبی آموخته‌اید که هر قدر اندازهٔ بهرهٔ حلقه در این فرکانس بزرگتر باشد، مقابلهٔ با خطا در این ناحیه نیز مناسب‌تر است. پس در ادامه به بررسی خطایِ حلقه در فرکانسِ صفر می‌پردازیم.

۳-۴-۱- خطا در فرکانسِ صفر به ازایِ ورودی‌هایِ از همین جنس

در واقع در این قسمت می‌خواهیم به ازایِ ورودی‌هایی که از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند، خطایِ حلقه را بررسی کنیم ولی نحوهٔ تحلیلی که در این کار استفاده می‌شود برای تحلیل به ازای ورودی‌های از هر جنس دیگری نیز قابل استفاده است. در تمامیِ این قسمت فرض بر این است که به خوبی در طراحی دقت شده است که حلقه ناپایدار نباشد وگرنه گفتگو از خطا در فرکانسی خاص تقریباً بی‌معنی می‌شود.

اگر اندازهٔ بهرهٔ حلقه در فرکانسِ صفر، عددی محدود باشد ـ که می‌دانید آن را بهرهٔ ثابت می‌نامیم ـ آنگاه خطای حلقهٔ هدایت، به صورت زیر خواهد بود:

$$\{\text{خطا در فرکانس صفر}\} = \frac{1}{1+k}\{\text{اندازهٔ ورودی در فرکانس صفر}\} \qquad (۸-۳)$$

پس خطا از جنسِ همان ورودی خواهد بود ولی به اندازهٔ $\frac{1}{1+k}$ تضعیف خواهد شد. یعنی هر چه بهرهٔ ثابت را افزایش دهیم، خطا کاهش خواهد یافت.

اگر اندازهٔ بهرهٔ حلقه در این فرکانس، یک بینهایت مرتبهٔ اول به همراهِ بهرهٔ ثابتِ k باشد، آنگاه خطا خواهد بود:

$$\{\text{خطا در فرکانس صفر}\} = \frac{1}{1+k\cdot\infty}\{\text{اندازهٔ ورودی در فرکانس صفر}\} \qquad (۹-۳)$$

یعنی اگر بهرهٔ ورودی در این فرکانس خود یک بینهایتِ مرتبهٔ اول با اندازهٔ واحد باشد، بهرهٔ خطا در این فرکانس، عددِ محدودِ $\frac{1}{k}$ است و این مقدار در فرکانس صفر فوریهٔ سیگنالی است که جمعِ آن در سراسرِ زمان، محدود به همین عدد است و این یعنی در بازه‌ای از زمان جمعِ غیر صفری دارد ولی این جمع به سمت بینهایت میل نمی‌کند. یعنی خطا به صفر میل خواهد نمود.

به همین ترتیب اگر بهرهٔ ورودی در این فرکانس یک بینهایت مرتبهٔ دوم با اندازهٔ واحد باشد، بهرهٔ خطا در این فرکانس، یک بینهایتِ مرتبهٔ اول با اندازهٔ $\frac{1}{k}$ خواهد بود. پس جمعِ خطا در سراسرِ زمان، بینهایتِ مرتبهٔ اول با اندازهٔ $\frac{1}{k}$ است، یعنی خطایِ ثابتی داریم به اندازهٔ $\frac{1}{k}$

نکتهٔ ریاضی‌ای که در رابطه با مباحث بالا باید یادآور شد این است که چنانچه در فرکانسی، فوریهٔ سیگنالی بینهایت نگردد، از این فرکانس در آن سیگنال به طور مانا چیزی نیست! لذا اگر فوریه، مطلقاً صفر شود یعنی هیچ اثری از این فرکانس در آن سیگنال نیست و اگر عددی محدود شود یعنی در بازهٔ محدودی از زمان چیزی هست ولی ماندگار نیست و نابود می‌شود و اگر بینهایتِ مرتبهٔ اول شود یعنی هست و با دامنه‌ای محدود نیز تا ابد ماندگار است. به همین ترتیب اگر بینهایتِ مرتبهٔ دوم شود یعنی: نه تنها به طور ابدی هست بلکه دامنهٔ آن نیز محدود نمانده و متناسب با زمان فزاینده است. اگر بینهایتِ مرتبهٔ سوم شد، یعنی ابدی و متناسب با توان دویِ زمان فزاینده است.

پس اگر می‌خواهید با اعمال ورودی‌ای که مقدار متوسطش در سراسرِ زمان غیر صفر است (در فرکانس صفر، فوریه‌اش بینهایتِ مرتبهٔ اول است) یعنی ثابتِ مانایی(ابدی‌ای) دارد مانند پله، خطایِ مانایِ ثابتی در خروجی نداشته باشید، لازم است بهرهٔ حلقهٔ شما در فرکانسِ صفر بینهایت باشد. به زبانِ خطی یعنی حداقل یک قطب در مبدأ داشته باشد. اگر دو قطب در مبدأ داشته باشد به ورودی‌هایی که با شیبِ ثابتی زیاد می‌شوند نیز، خطایِ مانایِ ثابتی نخواهد داشت یعنی خطایِ مانا در این حالت به صفر میل می‌کند. به همین ترتیب می‌توانید نتایج دیگر را نیز بگیرید.

دوباره توجه داده می‌شود که درست است که آنچه گذشت بیشتر به ورودی‌هایِ فرکانسِ صفر پرداخت ولی به هیچ وجه به موضوعِ فرکانس صفر و ورودی‌هایِ از این جنس محدود نیست و دربارهٔ همهٔ فرکانس‌ها قابل تعمیم است.

۳-۴-۲- رسیدن به یک پهنای باندِ داده شده

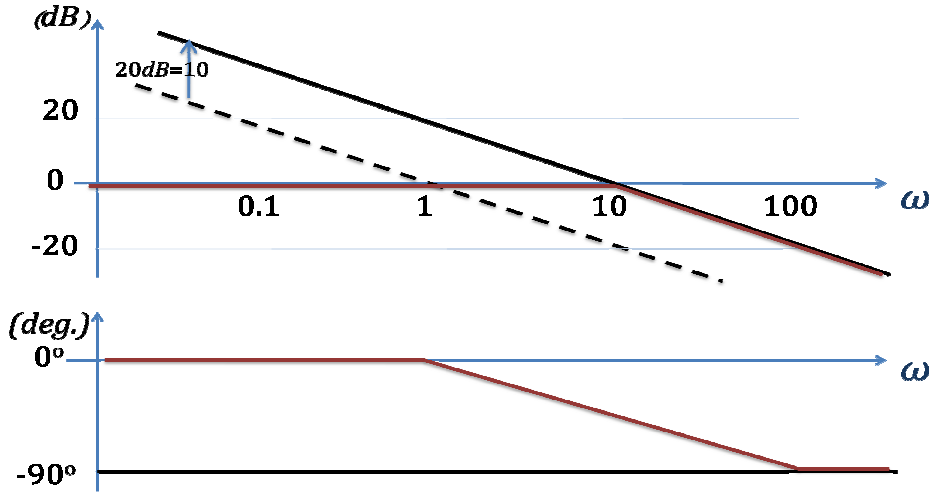
دانستیم که اگر فاز در ناحیهٔ گذار به خوبی مراقبت شده باشد، فرکانس گذرِ اندازهٔ بهرهٔ حلقه تقریباً همان فرکانسِ پهنای باند حلقه خواهد شد. پس برای تعیینِ پهنای باندِ حلقه لازم است فرکانسِ گذر اندازهٔ بهرهٔ حلقه را درست در همان حدودی بگذاریم که می‌خواهیم پهنای باند حلقه باشد.

یک فکر بسیار ابتدایی این است که ببینیم در این فرکانس مورد نظر برای پهنای باند حلقه، اندازه بهره حلقه چقدر است و هر مقداری که برای رسیدن به واحد کم یا زیاد دارد، آن را با استفاده از اضافه کردن بهرهٔ تنها در تمامیِ فرکانس‌ها افزایش یا کاهش دهیم تا در این فرکانس مورد نظر به اندازهٔ واحد برسیم و با این کار این فرکانس بشود فرکانس گذرِ اندازهٔ بهرهٔ حلقه. البته این فکر به شرطی بدون اشکال است که فرکانسِ گذرِ اندازهٔ جدید، دارایِ حد فاز قابل قبول و مطلوبی باشد.

اگر حد فاز مناسب باشد که کار تمام است و مشکلی نداریم و طراحی با یک جبران‌ساز بهرهٔ تنها به پایان می‌رسد. ولی اگر حد فاز مناسب نباشد معلوم می‌شود که با یک بهرهٔ تنها نمی‌توان به پهنای باند مطلوب رسید.

مثال ۳-۱-

به عنوان نمونه به نمایش بودیِ سامانهٔ مرتبهٔ اول مربوط به ارتفاع مایع داخل مخزن مثال ۲-۳ که بیان ریاضیِ آن یک جمعگر خالص است، بنگرید(شکل ۳-۸).



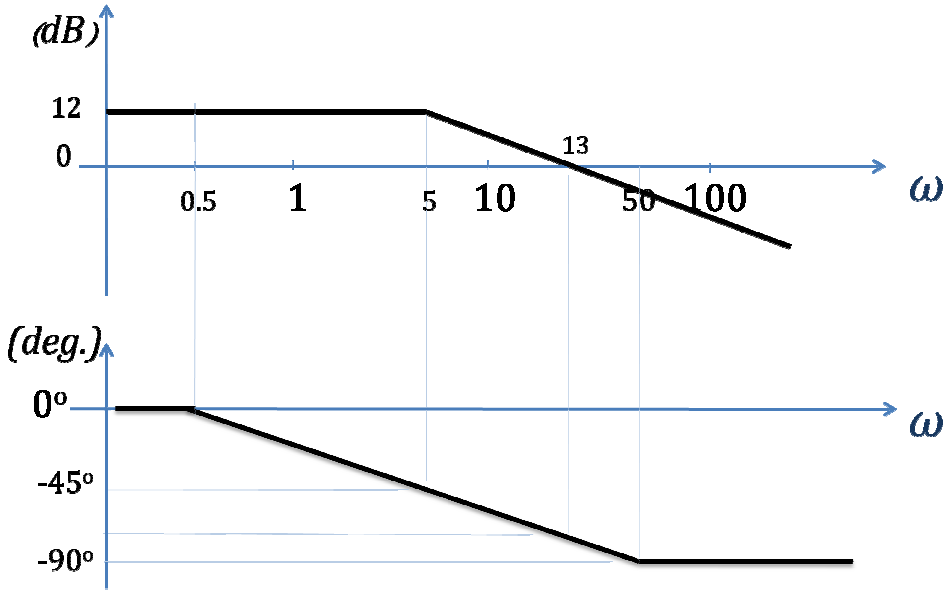
شکل ۳-۸- پاسخ فرکانسی سامانه مرتبه اول مثال ۳-۱ منحنی مشکی پاسخ فرکانسی بهره حلقه را قبل و بعد از اضافه نمودن بهره ۱۰ و منحنی قرمز پاسخ فرکانسی نتیجه حلقه را نشان می‌دهد.

به خوبی مشاهده می‌کنید که در تمامیِ فرکانس‌ها فاز بهره حلقه $-90°$ است. این یعنی هر فرکانسی را فرکانس گذر اندازه قرار دهیم، حد فاز $90°$ است. این حد فاز بسیار مناسب است.

پس مثلاً اگر می‌خواهید پهنای باند را به 10 افزایش دهید، کافیست از بهرهٔ تنها استفاده کنید و اندازه را افزایش دهید تا اندازه که هم‌اکنون در این فرکانس، 0.1 است، به 1 برسد. به خوبی می‌دانید که بهرهٔ مورد نیاز برای این کار، 10 است. توجه دارید که چون بهرهٔ تنها هیچ تأثیری روی فاز نمی‌گذارد، پس حد فاز همان $90°$ است که از پیش فکرش را کرده بودیم. این موضوع در شکل ۳-۸ نشان داده شده است. البته در شکل، نمایش بودی نتیجهٔ حلقهٔ هدایت طراحی شده نیز به همراه آورده شده است که در آن پهنای باندِ مطلوب دیده می‌شود.

مثال ۳-۲-

یک نمونهٔ دیگر می‌تواند سامانهٔ مرتبهٔ اول با یک قطب ساده در فرکانسِ 5 و بهرهٔ ثابتِ 4 باشد($\frac{20}{s+5}$)، نمایش بودیِ این سامانه را در شکل ۳-۹ می‌بینید. توجه کنید که در اینجا فاز در همهٔ فرکانس‌ها یکسان نیست ولی در کمترین مقدارش به $-90°$ می‌رسد. پس به لحاظ حد فاز در هیچ فرکانسی به مشکل نخواهیم خورد.



شکل ۳-۹- پاسخ فرکانسی سامانه $\frac{20}{s+5}$؛ مثال ۳-۲

فرکانس گذرِ اندازه هم‌اکنون از معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{400}{\omega^2+25} = 1 \rightarrow \omega^2 = 375 \rightarrow \omega \cong 13 \qquad (۱۰-۳)$$

حال اگر بخواهید پهنای باند را افزایش دهید و به 100 برسانید، باید ببینید چقدر انـدازه لازم است که اضافه گردد. کافیست ببینید فاصله اندازه بهره حلقه در این فرکانس تـا بهـره واحـد چقدر است:

$$\sqrt{\frac{400}{10000+25}} \cong \frac{20}{100} = 0.2 \rightarrow \frac{1}{0.2} = 5 \qquad (۱۱-۳)$$

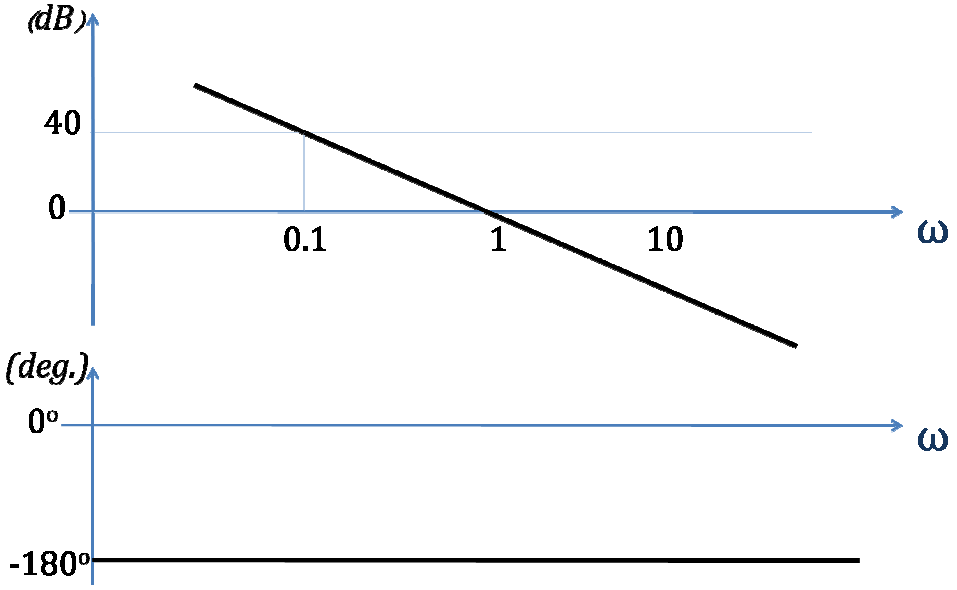
یعنی ۵ تا کم داریم. پس برای رسیدن به مطلوب مسئله باید با اضافه کردن بهرهٔ تنهایِ 5 فرکانسِ 100 را فرکانس گذر اندازه کرد تا این فرکانس پهنای باند حلقهٔ هدایت گردد.

تمرین ۳-۳-

حاصل عملیات مثال ۳-۲ را در شکلی به صورت نمایش بودی به طور کامل بیاورید.

۳-۵- جبران‌ساز پیش فاز

ولی حالا بیایید برویم سراغ سامانه‌های مرتبهٔ دوم، مثلاً سامانه‌ای که دو جمعگر خـالص دارد($\frac{1}{s^2}$). آموخته‌ایم که فوراً باید نمایش بودی سامانه را بررسـی کنـیم. در شـکل ۳-۱۰ پاسـخ فرکانسی این سامانه را می‌بینید. ملاحظه می‌کنید که فاز در تمامی فرکانسها $-180°$ است. یعنی اگر به همین ترتیب بخواهید با استفاده از بهرهٔ تنها هر فرکانسی را به عنوان فرکانس گـذر انـدازه کنید، حد فاز شما متأسفانه، صفر خواهد شد. این بدین معنی است که سامانهٔ حلقه با هر بهرهٔ تنها، ناپایدار است و کاملاً تشدید رخ می دهد! خوب! چه کنیم؟!

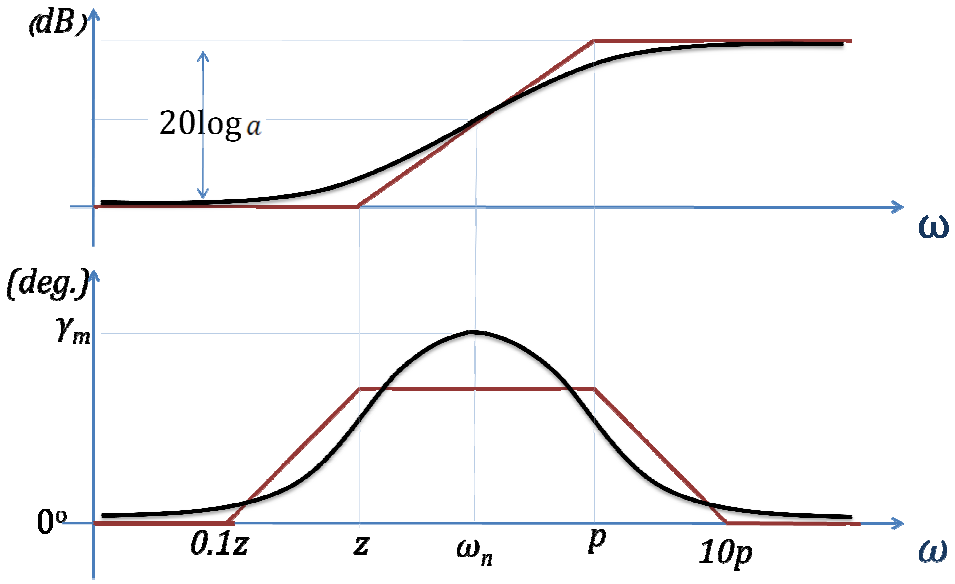


شکل ۳-۱۰- پاسخ فرکانسی تابع تبدیل درجه دوم $\frac{1}{s^2}$

۳-۵-۱- طراحیِ جبران‌ساز پیشفاز برای رسیدن به یک پهنایِ باند مشخص

برای حل مشکل بالا که بسیار عمومی است، باید جبران‌سازیِ فاز انجام گردد. با این کار می‌توانیم فاز اضافه کنیم و کمبود فازی را که داریم جبران کنیم تا از تشدید و یا ناپایداری برهیم.

به خوبی می‌دانیم که جبران‌سازی با یک صفرِ تنها، فاز را تا $90°$ زیاد می‌کند. از طرفی می‌دانیم که تحققِ یک صفرِ تنها، یعنی تحقق یک سامانهٔ ناسره که در زمانِ واقعی قابل ساختن نیست. به همین دلیل ناچار، در سامانه باید یک قطب هم پس از صفر داشته باشیم. چنین ترکیبی که با روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳) معرفی شده دارایِ نمایش بودی به شکل ۳-۱۱ است.



شکل ۳-۱۱- نمایش بودی سامانه جبران‌ساز پیشفاز به همراه خطوط راهنما

$$H(s)=\frac{s-z}{s-p} \quad ,z<p \tag{۱۲-۳}$$

$$\omega_m=\sqrt{zp} \quad \text{و} \quad a=\frac{p}{z} \tag{۱۳-۳}$$

خوب توجه کنید که این جبران‌ساز در واسطهٔ هندسیِ دو فرکانسِ صفر و قطب یعنی ω_m، بیشترین ازدیادِ فاز را به مقدار γ_mدارد.

$$\gamma_m=sin^{-1}\frac{a-1}{a+1} \tag{۱۴-۳}$$

پس باید در فرکانسِ مطلوب (همان فرکانسی که به عنوان پهنای باند سامانه هدایتی مورد نظر است) کمبودِ فازِ خود را برای رسیدن به حد فازِ مناسب به دست آورید و این کمبود را با این جبران‌ساز، جبران کنید.

مثال ۳-۳-

فرض کنید بخواهیم سامانه هدایتی‌ای برای تابع تبدیل $\frac{1}{s^2}$ طراحی کنیم که پهنای باندِ 10 داشته باشد. در شکل ۳-۱۰ دیدیم که بدون جبران‌سازیِ فاز حد فاز در این فرکانس، صفر است. اگر حد فازِ $30°$ قابل قبول باشد و مطلوب خود را نیز همین قرار دهیم لازم است به همین میزان، فاز اضافه کنیم. یعنی:

$$\gamma_m = 30 \rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{p}{z} = 3 \qquad (۱۵-۳)$$

$$\omega_m = \sqrt{zp} \rightarrow 100 = zp \qquad (۱۶-۳)$$

$$\rightarrow 100 = 3z^2 \rightarrow z \cong 6 \rightarrow p = 18 \qquad (۱۷-۳)$$

به این ترتیب جای صفر و قطب جبران‌ساز معلوم گشت. ولی هنوز کار تمام نیست! چرا؟!

توجه کنید که فاز در فرکانسِ 10 درست شد ولی اندازه که هنوز اصلاح نشده است! پس باید جبرانِ اندازه نیز مانند قبل انجام پذیرد تا در این فرکانس، اندازه واحد و این فرکانس، فرکانسِ

گذرِ اندازه شود. این کار نیز چندان سخت نیست، کافیست ببینیم چقدر تا اندازه واحد فاصله داریم و آن را اضافه و جبران‌ساز را کامل کنیم. پس بهرهٔ جبرانی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$k\left(\frac{s+z}{s+p}\text{ اندازهٔ}\right)\Big(\text{اندازه بدون جبران‌ساز}\Big)_{\text{در فرکانس گذر}} = 1 \qquad (۱۸-۳)$$

که در این مثال می‌شود:

$$k\left(\sqrt{\frac{10^2+6^2}{10^2+18^2}}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right) = 1 \rightarrow k = 177 \qquad (۱۹-۳)$$

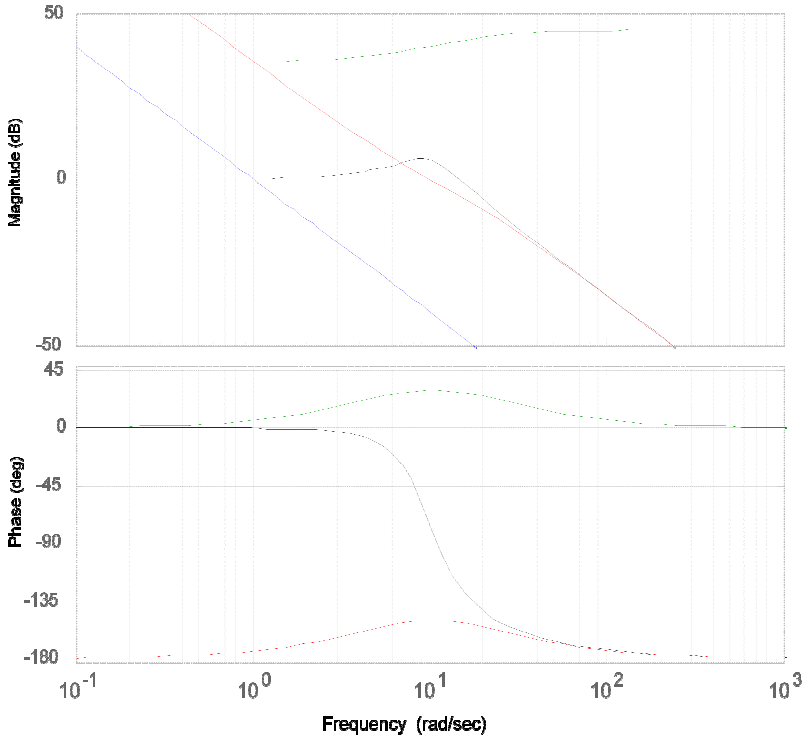
پس جبران‌ساز به طور کامل خواهد بود:

$$H(s) = 177\,\frac{s+6}{s+18} \qquad (۲۰-۳)$$

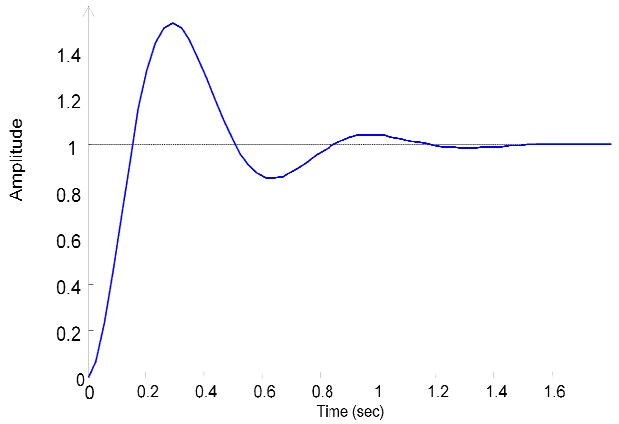
نتایج نهایی این طراحی در شکل ۳-۱۲ آمده است.

تمرین ۳-۴-

مشابهِ مثال۳-۳ را برای سامانه‌ای با الگوی ریاضیِ $\frac{1}{s(s+1)}$ اجرا کنید و نتایج را به طور کامل بیاورید.



آ



ب

شکل ۳-۱۲- آ. پاسخ فرکانسی مثال ۳-۳؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله سامانه هدایتی

حال بیایید ببینیم این طراحی ما چه مقدار بهرهٔ ثابت هزینه کرده و نهایتاً بهـرهٔ ثابـت را چقدر افزایش داده است. بهرهٔ ثابت بدون جبران‌ساز پیش‌فاز 1 بوده است. جبـران‌سـاز نیـز دارایِ بهرهٔ ثابتِ $59 = \frac{6}{18} \cdot 177$ است. خوب ملاحظه کنید که در این روندِ طراحی، اینکه بهرهٔ ثابـت چه خواهد شد، مد نظر نبوده و رسیدن به پهنای باندِ مورد نظـر، اصـل اسـت. حـال اگـر داسـتان برعکس باشد و برای ما رسیدن به یک بهرهٔ ثابتِ معینی، اساسی باشد ولی علاقه‌مند باشیم که در عین حال، هر قدر که ممکن است پهنای باند نیز زیرِ سایهٔ این بهرهٔ ثابتِ هزینـه شـونده، زیـادتر گردد، روندِ طراحی را باید کمی تغییر دهیم.

۳-۵-۲- طراحیِ جبران‌ساز پیشفاز با هزینهٔ معین بـرای رسـیدن بـه بیشترین پهنایِ باند

توجه کنید که در این حالت برعکسِ آنچه در بالا داشتیم، فرکانس گذرِ اندازه را نداریم و از پیش برای ما گزینش نشده است. پس دوباره به گونه‌ای آن را تعیـین و یـا حـدس مـی‌زنـیم و سپس از همان روندِ بالا کار را پیش می‌بریم.

برای این منظور ابتدا می‌بینیم شاید بهرهٔ تنها به همان اندازهٔ مطلوب و معین، بتواند کـار را تمام کند. کافیست ببینیم با آن بهره، چه فرکانسی، فرکانس گذرِ اندازه خواهد شد؟! برای یافتن این فرکانس کافیست ببینیم هم‌اکنون در چه فرکانسی، اندازه، عکس این مقدار است! یعنی:

$$-20\,log\,k = 20\,log|G(j\omega)| \quad \text{یا} \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{k} \qquad (۲۱-۳)$$

حال باید ببینیم حدفاز در این فرکانس چقدر است و آیا کافیست و مطابق رفتار مطلـوب هست یا نه!؟ یعنی:$\angle G(j\omega)$ را در این فرکانس بررسی می کنیم.

اگر حد فاز فعلی کافی و مورد قبول باشد که کار تمام اسـت و نیـازی بـه جبـران‌سـازیِ پیشفاز نداریم. ولی اگر فاز و در نتیجه، حد فاز در آنجا مناسب و مطلوب نباشد، بایـد کمبـود آن را جبران کنیم. اما با اضافه شدن جبران‌ساز پیشفاز این گونه نیست که در اندازه، فقـط همـان بهـرهٔ ثابتِ الزامیِ k دخالت کند و بتوان با روند بالا به فرکانسِ مجهولِ گذرِ اندازه دسـت یافـت! بلکـه شبکه پیشفاز نیز در اندازه اثرگذار است! پس باید چه کرد؟!

در اینجا لازم است به بهرهٔ کلی که جبران‌ساز در فرکانسِ گذرِ اندازه، نهایتاً ایجاد خواهد کرد توجه نمود:

$$20\,log|G(j\omega)| = -20\,log\,k - 10\,log\,a \qquad (۲۲-۳)$$

$$\rightarrow 20\,log|G(j\omega)| = -20\,log\,k\sqrt{a} \;\text{یا}\; |G(j\omega)| = \frac{1}{k\sqrt{a}} \qquad (۲۳-۳)$$

اما اشکال این است که ما هنوز جبران‌ساز پیشفاز را طراحی نکرده‌ایم که a را بدانیم و در بالا استفاده کنیم! خوب! چه کنیم؟!

در اینجا پیشنهاد می‌کنیم یک مسیر رفت و برگشتی و سعی و خطایی را پـیش بگیریـد. ابتدا این ضریبِ a را حدود 10 قرار دهید و از رابطهٔ (۳-۲۲) فرکانس را بیابید. ایـن فرکـانس بـه عنوان فرکانس گذرِ نهایی نیست بلکه باید ببینید در این فرکانس برای رسیدن به حـدفاز مطلـوب چقدر فازِ اضافه لازم است. با تعیین مقدار فاز مورد نیاز حدسی نسبتاً مناسب برای γ_m بـه دسـت

می‌آید و از رویِ آن می‌توانید برای a مقدار مناسبتری تعیین کنید. حالا با این aیِ جدید دوباره فرکانسِ گذرِ جدیدی را پیدا کنید. در ادامه این حدس را به عنوان فرکانسِ گذرِ اندازهٔ پیشنهادی قرار دهید. حالا از روندِ بخش پیشین استفاده و طراحیِ کاملی را اجرا کنید.

با این روند به جبران‌سازی رسیده‌اید که معلوم نیست حتماً همان بهرهٔ ثابتِ مطلوب را به کار برده باشد ولی امیدواریم که خیلی نزدیک به آن و تقریباً درست باشد. باید ببینیم، بهرهٔ ثابتش چقدر شده است و اگر تقریباً مطلوب است که کار تمام است ولی اگر چنین نیست کافیست فرکانس گذرِ پیشنهادی را کمی به سمتِ صحیحی که تشخیص می‌دهیم تغییر دهید و دوباره طراحی را انجام دهید تا به پاسخ مطلوب برسیم.

مثال ۳-۴-

فرض کنیم در مثال قبل (سامانه جمعگر مرتبه دوم) خواسته شده است که جبران‌ساز فاز به گونه‌ای طراحی شود که با اعمال بهرهٔ ثابتِ 100 تا حد امکان پهنای باند افزایش یابد. البته حد فاز مطلوب نیز حداقل 30° در نظر گرفته شده است.

با توجه به پاسخ فرکانسی سامانه که در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است پر واضح است که با بهرهٔ تنها کار انجام نمی‌شود و حتماً جبران‌سازی فاز لازم است. اما توجه می‌کنیم که در این نمونه تمامی فرکانس‌ها به اندازهٔ 30° اضافه فاز می‌خواهند(لذا نیازی به فرضِ اولیهٔ 10 برای a نیست و این ضریب به دقت به دست می‌آید و یک مرحله از سعی و خطا کاهش می‌یابد). پس ضریبِ a به دست می‌آید:

$$a = \frac{1+sin\,30}{1-sin\,30} = 3 \qquad (۲۴-۳)$$

به این ترتیب حالا اقدام می‌کنیم به محاسبهٔ حدس خوبی برای فرکانس گذر اندازه!

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{100\sqrt{3}} \rightarrow \omega = 10 \cdot \sqrt{1.7} = 13 \qquad (۲۵-۳)$$

حال با این فرکانس گذرِ پیشنهادی همان روندِ بخش پیشین را دنبال مـی‌کنـیم. روشـن است که در این مثال، دوباره a همان مقدار بالا به دست می‌آید و لذا داریم:

$$zp = 13^2 = 169 \text{ و } \frac{p}{z} = 3 \;\; \rightarrow 3z^2 = 169 \qquad (۲۶-۳)$$

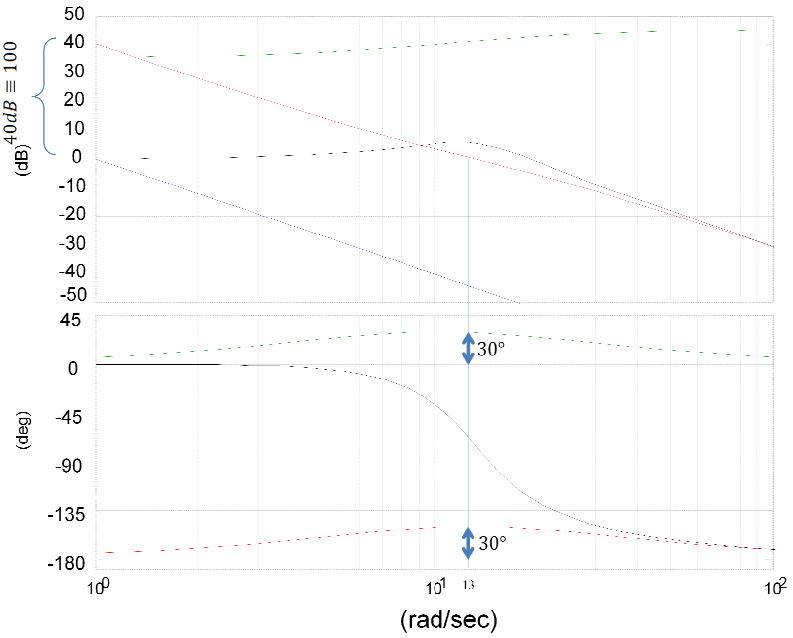
$$\rightarrow z = 7.5 \text{ و } \; p = 22.5 \qquad (۲۷-۳)$$

حالا باید بهرهٔ جبران‌ساز را به دست آوریم:

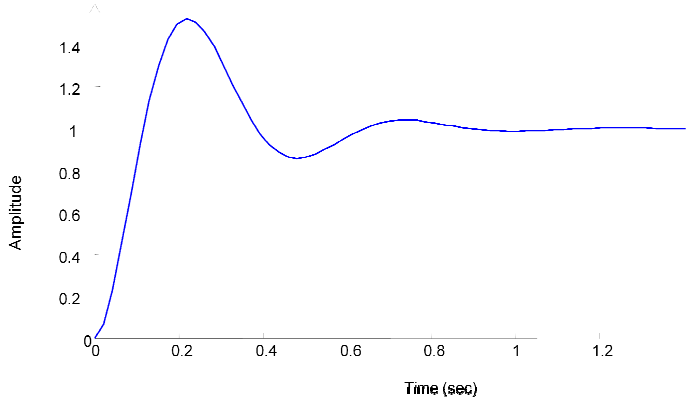
$$k\sqrt{a}\,|G(j\omega)| = 1 \;\; ; \;\; k\sqrt{3}\frac{1}{13^2} = 1 \rightarrow k = 98 \cong 100 \qquad (۲۸-۳)$$

که تقریباً همان 100 است که قرار بود برسیم. همیشه این گونـه نیسـت کـه دقیقـاً بـه همان نتیجهٔ مطلوب در همان سعیِ اول برسیم و شاید لازم باشد یک بار دیگر سعی کنیم. حاصل این طراحی نیز در شکل ۳-۱۳ آورده شده است.

$$\text{جبران‌ساز پیشفاز} \;\; : \;\; H(s) = 100\,\frac{\frac{1}{7.5}s+1}{\frac{1}{22.5}s+1} \qquad (۲۹-۳)$$



آ



ب

شکل ۳-۱۳- آ. پاسخ فرکانسی مثال ۳-۲؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه. ب. پاسخ پله سامانه هدایتی

تمرین ۳-۵-

مشابهِ مثال ۳-۲ را برای سامانه‌ای با الگوی ریاضیِ $\frac{1}{s(s+1)}$ اجرا کنید و نتایج را به طور کامل بیاورید.

تمرین ۳-۶-

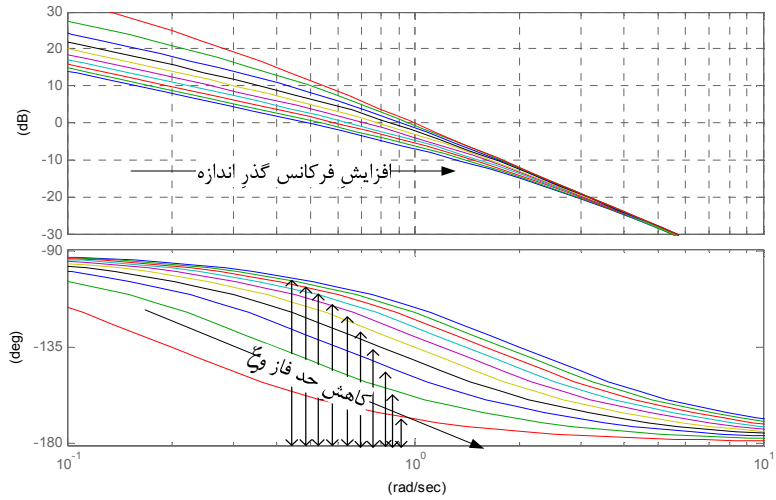
فرض کنید در تمرین ۲-۳۲، بهرهٔ ثابتِ حلقه باز به دلیلِ ملاحظاتِ خطا در فرکانس‌هایِ پایین باید60 باشد. سعی کنید با حاشیهٔ فازی حدودِ $40° - 50°$، بیشترین پهنای باندِ حلقه بسته (یعنی کمترین زمان نشست) را به دست آورید، درحالیکه اجازه دارید، از یک سامانه جبرانساز پیشفاز بهره برید.

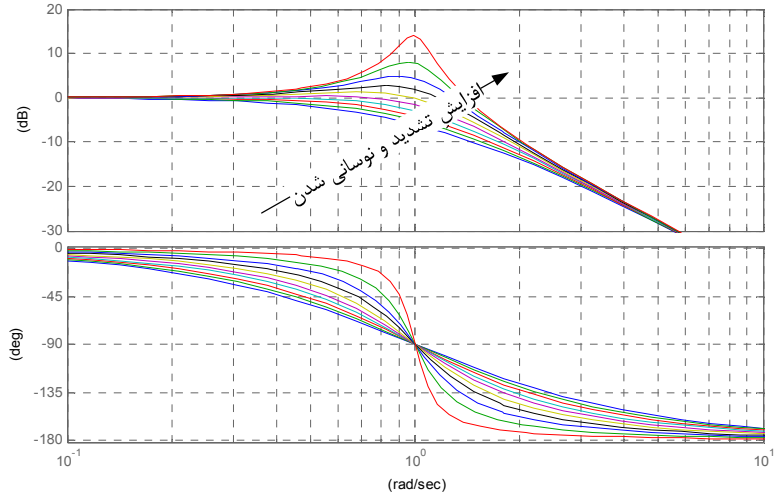
تمرین ۳-۷-

برای اینکه بینِ ادبیاتِ حوزهٔ زمان و فرکانس رابطه‌ای برقرار کنیم، سامانهٔ مرتبهٔ دومِ با قطب‌های مختلط را معیار قرار می‌دهیم. برای این منظور باید ببینیم چه سامانه‌ای در بهرهٔ حلقه، این سامانهٔ مرتبهٔ دوم را به عنوان نتیجهٔ حلقه به بار می‌آورد!؟

الف ـ نشان دهید بهرهٔ حلقهٔ $\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ نتیجهٔ حلقهٔ $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ را به بار خواهد آورد. نمایش بودیِ هر دو را همراهِ هم رسم کنید و به شکلی مشابهِ

شکل ۳-۱۴ به ازایِ ξهای گوناگون برسید. راهنمایی: می‌توانید در *Matlab* ، فرکانس طبیعی را واحد بگیرید و ضریب میرایی نوسانات را تغییر دهید.





شکل ۳-۱۴- نمایش فرکانسی تابع تبدیل $\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ و نمایش فرکانسی سامانه حلقه بسته آن $(\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2})$

ب ـ نشان دهید فرکانسِ گذر بهره خواهد بود:

$$\omega_n\left(\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}\right) \qquad (۳۰-۳)$$

ج ـ نشان دهید حد فاز خواهد بود:

$$PM = 90° - tan^{-1}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}}{2\xi} \qquad (۳۱-۳)$$

د ـ به کمک رسم، نشان دهید عبارتِ زیر برای حدفاز از $0°$ تا حدودِ $70°$ ، تقریبِ مناسبی است و بیشینهٔ خطای آن را در این محدوده به دست دهید.

$$\xi \approx 0.01(PM)° \quad \text{یا} \quad (PM)° \approx 100\xi \qquad (۳۲-۳)$$

عبارتِ تقریبیِ (۳-۳۲) برای تبدیلِ تعبیرِ نوسانی بودنِ پاسخِ زمانی به تعبیرِ تشدید در پاسخِ فرکانسی بسیار راهگشاست!

ه- با استفاده از تبدیلِ به دست آمده در بالا مقدارِ فراجهشِ پاسخ پله را در طراحی‌های بالا با آنچه از حدفازِ مربوطه حدس زده می‌شود، مقایسه کنید.

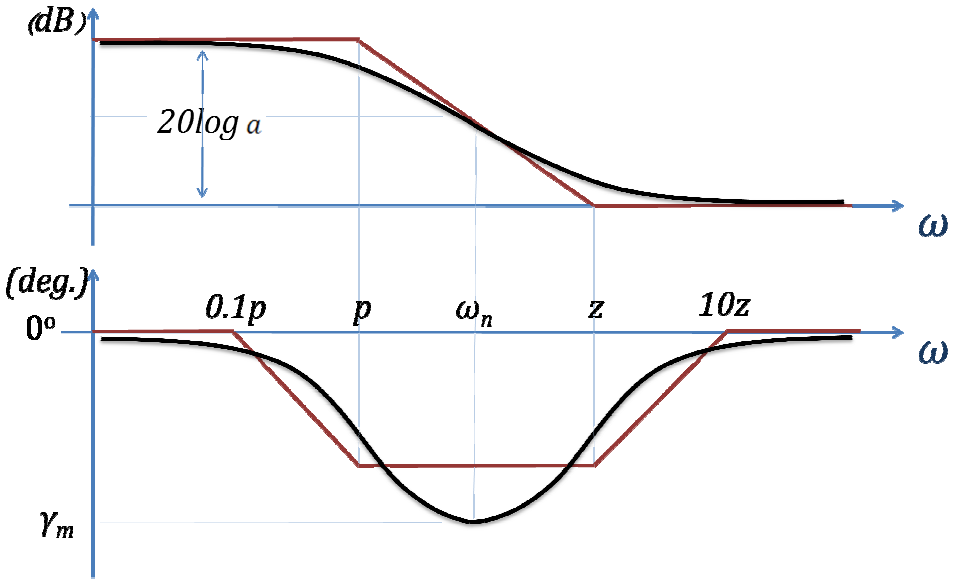
تمرین ۳-۸-

تمرین ۲-۳۲ را در نظر بگیرید. این طراحی را با استفاده از بیانِ فرکانسی اجرا کنید. برای این منظور ابتدا خواسته‌های رفتار را ـ که در آنجا به زبانِ «تغییرِ نسبت به زمان» بیان شده‌اند ـ به متناظرهایِ آنها در بیانِ فرکانسی، تبدیل کنید. راهنمایی: از پل‌هایِ تقریبی استفاده کنید یعنی ثابت زمانی مساویِ عکسِ پهنایِ باند و صد برابرِ ضریبِ میرایی نوسانات مساویِ حاشیهٔ فاز به درجه($(PM)° \approx 100\xi$).

۳-۶- استفاده از جبران‌ساز پس‌فاز برای بهبود خطایِ مانـای فرکـانس های پایین

در شرایطی لازم می‌شود خطای مانا را برای فرکانس‌هـای عبـور(فرکـانس‌هـای پـایین) کاهش دهیم. می‌دانید این کار به آسانی با اضافه کردنِ اندازه در این فرکانس‌هـا میسـر اسـت! از طرفی دیدید که اضافه نمودنِ این اندازه به وسیلهٔ بهرهٔ تنها، می‌تواند باعث شود که رفتار مناسـبی در ناحیهٔ گذار نداشته باشیم. اگر مشکلی نباشد و فرکانس گذری که با اضافه کردن اندازه به وجود می‌آید، دارایِ حدفاز خوبی باشد که هیچ جبران‌ساز دیگری لازم نیست. اما دو حالت دیگر هسـت که می‌خواهیم در ادامه به آن بپردازیم و نشان می‌دهیم با کمک گرفتن از جبران‌سازی که پس‌فاز نامیده شده است، می‌توان مشکلات به وجود آمده را حل نمود.

پیش از ادامه، این جبران‌ساز را معرفی و نمایش بودی آن را رسم می‌کنیم. این جبران‌ساز درست عکس جبران‌ساز پیشفاز عمل می‌کند. چراکه قطب آن نسبت به صفرش، به مبدأ نزدیکتـر است و لذا به جای اینکه پیشفازی ایجاد کند در ناحیهٔ مربوطه، پسفازی می‌دهد! (به شـکل ۳-۱۵ توجه کنید).



شکل ۳-۱۵- نمایش بودی جبران‌ساز پسفاز $\frac{s-z}{s-p}$ به همراه خطوط راهنما

ممکن است بسیار شگفت‌زده شوید که چگونه ممکن است چنین جبران‌سازی، به درد بخور باشد! چراکه بعید است در جایی قصد داشته باشیم، فاز را با دست خودمان تخریب کنیم. نکته این است که بر خلاف نام این جبران‌ساز خوبیِ آن در رفتارِ فاز آن نیست بلکه در رفتارِ اندازه‌اش نهفته است، ولی متأسفانه با توجه به عیبش، نام‌گذاری شده است. چنانچه اندازه‌اش را ملاحظه می‌کنید، این جبران‌ساز در ناحیهٔ ابتداییِ خود از فرکانس‌هایِ پایین تا قطبش (که شما طراحی می‌کنید)، بهره‌ای دارد که از جایِ صفرش به بعد، درست به اندازهٔ نسبتِ صفر به قطب‌اش($a = \frac{z}{p}$)، کاهش می‌یابد.

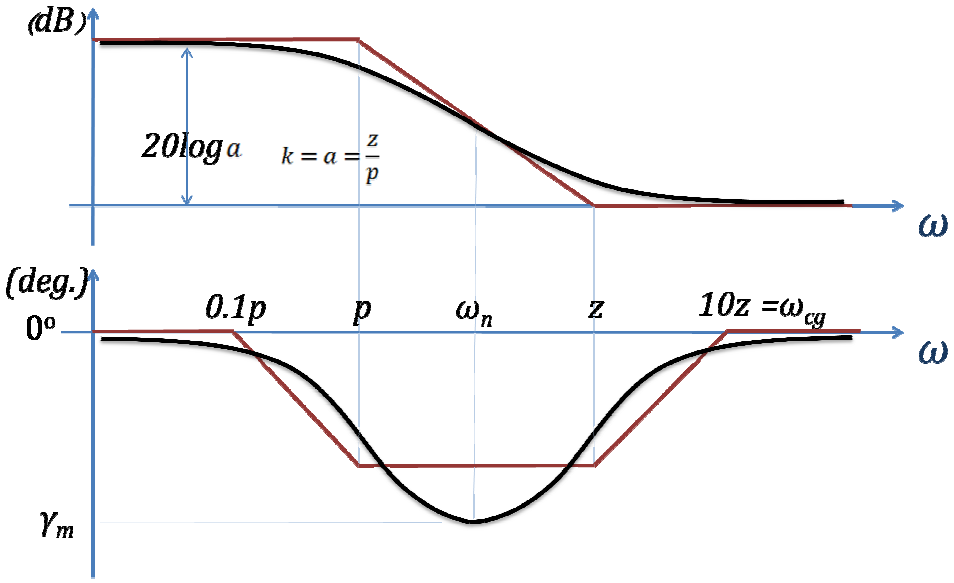
به این ترتیب با این جبران‌ساز، ما این امکان را داریم که در ناحیهٔ عبور تا جایی که می‌خواهیم اندازه را افزایش دهیم در حالی که از آنجا به بعد که قاعدتاً ناحیهٔ گذار و قطع شروع

می‌شوند، این افزایش قطع می‌شود و می‌توانیم از مضرات این افزایش در این نواحی در امان بمانیم.

۳-۶-۱- طراحی جبران‌ساز پسفاز برای رسیدن به پهنای باند و ناحیهٔ گذار تعیین شده

در این قسمت به شرایطی می‌پردازیم که پیش‌تر به رفتارِ ناحیهٔ گذار و پهنای باند پرداخته شده است و نمی‌خواهیم هرگز آنچه را که تاکنون طراحی کرده‌ایم، مخدوش سازیم و فقط می‌خواهیم آن مقداری که بهرهٔ ثابت لازم داریم در ناحیهٔ عبورِ کنونی اضافه کنیم. پر واضح است که استفادهٔ از بهرهٔ تنها به راحتی این ناحیهٔ پیشتر نهایی شده را به هم خواهد ریخت. در ادامه با به کارگیری جبران‌ساز پس‌فاز این مشکل را حل خواهیم نمود.

برای این منظور کافیست فرکانس گذر اندازه‌ای که گویا هم‌اکنون به خوبی طراحی شده و دارایِ حدفاز قابل قبولی هم هست را در نظر بگیریم و صفرِ جبران‌ساز پسفاز را حدودِ $\frac{1}{10}$ آن قرار دهیم. یعنی جبران‌ساز پسفاز را در جایی قرار دهیم که اثرِ پسفازی آن در ناحیه گذار و قطع تمام شده باشد و دیگر نتواند حدفازِ پیشتر طراحی شدهٔ ما را خراب کند. ضمناً باید این جبران‌ساز در همین ناحیهٔ گذار، تأثیری روی اندازه نیز نگذارد تا فرکانس گذر اندازهٔ از پیش طراحی شده نیز به هم نخورد! پس باید اندازه‌اش در این ناحیه واحد باشد. شکلِ بودیِ آن به طور کیفی در زیر آمده است:



شکل ۳-۱۶- برای طراحی جبران‌ساز کافی است صفرِ جبران‌ساز پسفاز را حدودِ $\frac{1}{10}$ فرکانس گذر اندازه‌ای که دارایِ حدفاز قابل قبولی هست قرار دهیم. ضمناً برای آنکه این جبران‌ساز در همین ناحیهٔ گذار، تأثیری بر اندازه نگذارد باید اندازه‌اش در این ناحیه واحد باشد.

اما هنوز اصل کار که اضافه کردن اندازه در ناحیهٔ عبور است را عملی نکرده‌ایم! برای این کافیست توجه کنیم به رفتار اندازهٔ این جبران‌ساز که بالاتر نیز شرح داده شد. شما این امکان را دارید که به مقدار نسبتِ صفر به قطب‌اش($a = \frac{z}{p}$)، اندازه را در ناحیهٔ عبورتان نسبت به ناحیهٔ قطع افزایش دهید. این همان مزیت این جبران‌ساز است که در مقدمه نیز آمد. به این ترتیب فقط کافیست اندازه‌ای را که می‌خواهید اضافه کنید در نظر بگیرید مثلاً k، و قطبِ جبران‌ساز را به همین نسبت کوچکتر از صفری که بالاتر تعیین شد، قرار دهید. لذا جبران‌ساز شما به صورت سادهٔ زیر طراحی خواهد شد:

$$H(s) = \frac{s+z}{s+\frac{z}{k}} \qquad (۳۳-۳)$$

توجه کنید که بهرهٔ پرش یا همان بهرهٔ فرکانس بالا در این سامانه جبران‌ساز واحد است، تا اندازه را در ناحیهٔ گذار تخریب نکند، بهرهٔ ثابت یـا همـان بهـرهٔ فرکـانس پـایین آن هـم، kی مطلوب شماست، تا به اندازه‌ای که می‌خواستید در ناحیهٔ عبور اندازه را بالاتر ببرد.

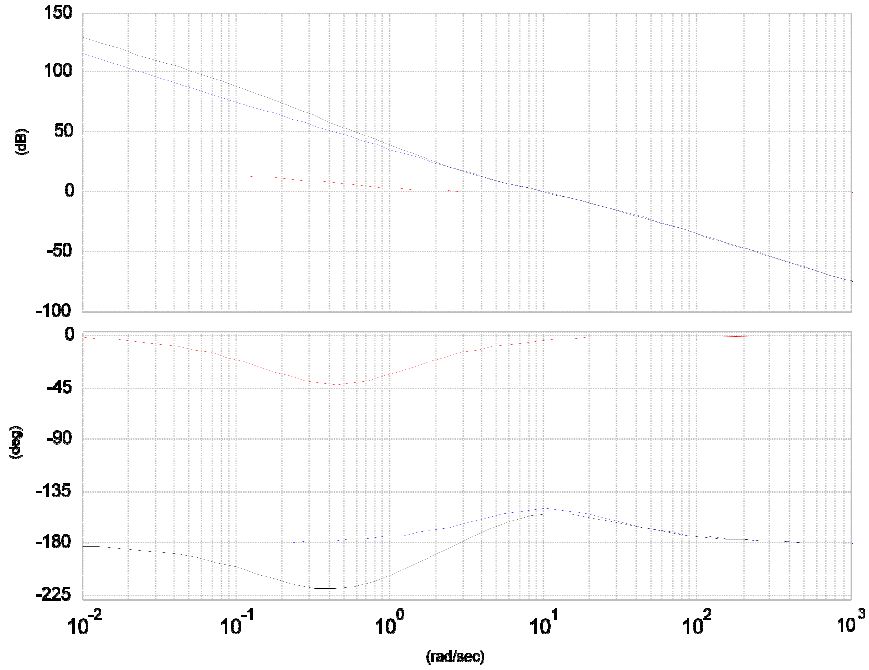
مثال ۳-۵-

همان طراحیِ انجام شده‌ای که در بخش پیشین برای دو جمعگـر خـالص داشـتیم را در نظر بگیرید و به بهرهٔ ثابتِ نهایی توجه کنید. می‌بینیم، 59 است. حال فرض کنید این مقدار برای ما کافی نبوده و مثلاً بخواهیم این بهرهٔ ثابت را 5 برابرِ دیگر افزایش دهیم تا خطایِ ناحیهٔ عبـور، همین حدود کاهش یابد. البته به زبان حوزهٔ زمان می‌توان گفت که خطایِ مانایِ به ورودی‌های از جنس پله و شیب و غیره، 5 برابر کاهش می‌یابد.

برای این، همان گونه که بالاتر نیز آمد، ابتدا لازم است فرکانس گذرِ اندازهٔ نهایی شده را بیابیم. از طراحیِ همانجا داریم که این فرکانس 10 بوده است. پس باید که برای مخدوش نشدنِ فازِ آن، صفرِ جبران‌ساز پسـفازمان را در 1 بگـذاریم. بهـرهٔ مطلـوب‌مـان هـم کـه 5 اسـت پـس جبران‌سازمان به آسانی به دست می‌آید:

$$H(s)=\frac{s+1}{s+\frac{1}{5}} \qquad (۳۴-۳)$$

حاصلِ نهایی با به کارگیری این جبران‌ساز در ادامـهٔ طراحـی‌هـای قبلـی، در شـکل ۳-۱۷آورده شده است.



شکل ۳-۱۷- نمایش فرکانسی نتیجه طراحی با استفاده از شبکه پسفاز؛ مثال ۳-۵

تمرین ۳-۹-

فرض کنید طراحی خواسته شده در تمرین ۳-۸، انجام شده و مشخصه‌های و سرعت سیستم مورد تأیید است اما به دلیل دقت‌های لازم باید بهره حلقه ۵ برابر دیگر افزایش یابد.

الف ـ با استفاده از یک جبرانساز پس‌فاز این موضوع را تأمین کنید تا رفتار گذرا کمی دستخوش تغییر شود.

ب ـ جبرانساز کلی با ترکیب پیش‌فاز و پس‌فاز به این ترتیب طراحی شد، را یکجا بنویسید و با روش‌هایی که در کلاس آموختید فراجهش سامانه نهایی طراحی شده را به طور تقریبی به دست آورید.

۳-۶-۲- طراحیِ جبران‌ساز پسفاز برای اعمال هزینهٔ معین و رسیدن به بیشترین پهنایِ باند

در این حالت هر چند دربارهٔ پهنای باند پیشتر کار را تمام نکرده‌ایم، ولی در عین حال نمی‌خواهیم این بهرهٔ اضافی به وسیلهٔ جبران‌ساز پیشفاز مصرف و پهنای باند، افزایش حداکثری یابد بلکه فقط قصد ما افزایش بهرهٔ ثابت است، حال اگر در کنار آن کمی هم پهنای باند افزایش یافت اشکال ندارد؛ اما هدف افزایش آن نیست!

در اینجا استفاده از بهرهٔ تنها می‌تواند به راحتی مشکل ساز شود و ناحیهٔ گذار نامناسبی ایجاد کند ولی می‌توان با استفاده از جبران‌ساز پس‌فاز، این مشکل را در صورت بروز، حل نمود.

ابتدا باید ناحیه‌ای را که با چنین افزایش اندازه‌ای ناحیهٔ گذار می‌شود، در نظر بگیرید. به خوبی می‌دانید که برای این منظور کافیست ببینید در چه ناحیه‌ای اندازه هم‌اکنون عکس این مقدار را دارد. مثلاً اگر افزایش اندازهٔ مورد نظرتان، 1000 یا $20\,log\,1000 = 60dB$ است باید فرکانسی را که هم‌اکنون در آن اندازه $\frac{1}{1000}$ یا $-60dB$ است را بیابید.

از طرفی شما می‌دانید که قرار نیست پیشفازی اضافه شود و لذا باید به فرکانسی به عنوان فرکانس گذر رضایت دهید که هم‌اکنون دارایِ فاز مناسبی است و حدفاز قابل قبولی را

خواهد داشت. پس این فرکانس را در همان ناحیه‌ای که بالاتر به دست آوردید جستجو کنید و بیابید.

پس هم‌اکنون فرکانسی در دست دارید که به عنوان فرکانس گذرِ اندازه‌تان انتخاب نموده‌اید. ولی باید توجه کنید که پس از اعمالِ بهرهٔ مطلوب، اندازهٔ در این فرکانس واحد نمی‌شود بلکه بزرگتر از واحد می‌گردد! حال باید چه کنیم تا پس از اعمال آن بهرهٔ مطلوب، در این فرکانس، اندازهٔ واحد حاصل گردد؟

برای این منظور از پس‌فاز استفاده خواهیم نمود که بهره را در این فرکانس به اندازه‌ای که می‌خواهیم، کاهش دهد. اندازه‌ای که می‌خواهیم تا پس از افزایشِ بهرهٔ مطلوب کاهش داده شود، همان بهرهٔ کاهشیِ جبران‌ساز پس‌فاز ما خواهد بود. این مقدار باید با توجه به اندازهٔ کنونیِ آن به دست آید:

$$a = \frac{z}{p} = \text{اندازهٔ کنونی} \times \text{بهرهٔ مطلوب} \qquad (۳۵-۳)$$

به این ترتیب aی جبران‌ساز تعیین می‌گردد. حال مانده که تعیین کنیم این کاهشِ اندازه از چه فرکانسی شروع گردد!؟ البته پر واضح است که باید این کاهش تا قبل از این فرکانس نهایی شده به عنوان فرکانس گذر اندازه باشد و لذا جایِ صفر را نمی‌توان بعد از این فرکانس انتخاب نمود. اما قبل از آن هم، هنوز انتخاب‌های فراوانی برای فرکانس‌هایِ شروع و پایانِ این کاهش قابل تعیین است.

برای انتخاب خود دو موضوع مهم را باید در نظر بگیریم! اول اینکه باید کاری کنیم تا از بهرهٔ مطلوب، فرکانس‌های بیشتری بهره برند! دوم اینکه نباید پس‌فـازیِ موجـود در جبـران‌سـاز، تأثیری در فازِ موجودِ فرکانسِ گذرِ آتی، بگذارد و حد فاز آتی ما را تخریب کنـد! موضـوعِ اول بـه معنای آن است که هر چه می‌توانید صفر جبران‌ساز را به فرکانسِ گذرِ آتی نزدیک کنیـد و بـرای رعایت موضوع دوم حتماً باید صفر را کوچکتر از $\frac{1}{10}$ برابرِ فرکـانس گـذر در نظـر بگیریـد. نتیجـه رعایت این دو انتخاب صفر در حدودِ همان $\frac{1}{10}$ برابر فرکانس گذر است. پـس اگـر فرکـانسِ گـذرِ اندازهٔ آتی را که در مرحلهٔ بالاتر آمده، ω بنامیم، صفر و قطب جبران‌سـاز بـه شـکل زیـر نهـایی خواهند شد:

$$z=\frac{\omega}{10}\ ,\ p=\frac{z}{a}\quad\rightarrow\quad \text{جبران‌ساز:}\ \ \frac{k}{a}\cdot\frac{s+\frac{\omega}{10}}{s+\frac{\omega}{10a}} \qquad (۳۶-۳)$$

تا اینجا باید اصول کار را آموخته باشید. باید همین جا گوشزد گردد که این راه طی شده برای رسیدن به جبران‌ساز، یگانه راه نیست! دقت کنیـد کـه مـا (بـا توجـه بـه اینکـه مـی‌دانـیم، جبران‌سازمان، پس‌فازی خواهد داشت) می‌توانستیم فرکانس گذر مطلوب را جایی انتخاب کنیم که فازِ بیشتر از مطلوب را داشته باشد، تا در مجموع با تخریبی کـه جبـران‌سـاز خواهـد داشـت، فـازِ مطلوب و یعنی حدفاز مطلوب ما را تأمین کنند. به این ترتیب شاید بتوانید طراحی‌های متنـوعی را داشته باشید.

اما چه ملاحظاتی در این تنوع است؟! اینها با هم چه فرقی دارند؟! خـوب دقـت کنیـد و سعی کنید خودتان به این پرسش بپردازید!

خوب دقت کنید که ما برای ملاحظهٔ فاز مجبور شده‌ایم ده برابر دیرتر، افزایشِ انـدازه را شروع کنیم، چراکه ملاحظهٔ اندازه فقط درخواست داشت که جای صفر را در همان حدودِ فرکانس گذرِ آتی قرار دهیم ولی ملاحظهٔ پس‌فازی ما را مجبور به گزینشِ $\frac{1}{10}$ی آن، کرده است. از طـرف دیگر اگر بخواهیم فرکانس گذر آتی را جایی انتخاب کنیم که فاز بهتر است معمـولاً بایـد بیـاییم عقب‌تر که این خود یعنی قناعت به پهنای باند کمتر! خوبیِ گزینشِ صفرِ جبـران‌سـاز در نزدیکـیِ فرکانس گذر آتی، در این است که فرکانس‌هایِ در گیر شونده بـه بهـرهٔ مطلـوب سـریعتر شـروع می‌شوند که این در کاهشِ خطایِ آنها کمی موثرتر است.

مثال ۳-۶-

سامانهٔ مرتبهٔ دوم با یک قطبِ در مبدأ و یک قطب سادهٔ پایدار را در نظر می‌گیریم، مثلاً $\frac{1}{s(s+1)}$.

فرض کنید بخواهیم بهرهٔ ثابتِ بهرهٔ حلقه، از واحد به ده افزایش یابد تا خطای مانایِ بـه ورودیِ شیب، $\frac{1}{10}$ شود. فرض کنید حدفاز مطلوب نیز حدود $45°$ تعیین شده باشد و به دلایل فنی دیگری نیز از جبران‌ساز پیش‌فاز نباید استفاده گردد.

ابتدا نمایش بودی را رسم می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است(شکل ۳-۱۸). بایـد ببینـیم بـا بهرهٔ تنهایِ 10 (افزایش $20dB$) چه فرکانسی می‌شـود فرکـانس گـذر انـدازه؟! بـا کمـی دقـت می‌بینید که این، حدودِ فرکانسِ 3 است که فاز در اینجا حـدود $-160°$ اسـت کـه یعنـی حـدفاز خواهد شد حدود 20 ! که به هیچ وجه قابل قبول نیست. پس باید فرکانس گذر را حدود فرکانسِ

1 که هم‌اکنون حدفاز $45°$ را ارضا می‌کند، انتخاب کنیم. (یعنی $\omega = 1$). حال باید دید اندازه در این فرکانس چقدر است و از رویِ آن و بهرهٔ مطلوب، aی جبران‌ساز را نیز تعیین کنیم:

$$\text{اندازهٔ کنونی} = 0{,}707 \quad \text{بهرهٔ مطلوب} = 10 \quad \rightarrow a \cong 7 \tag{۳۷-۳}$$

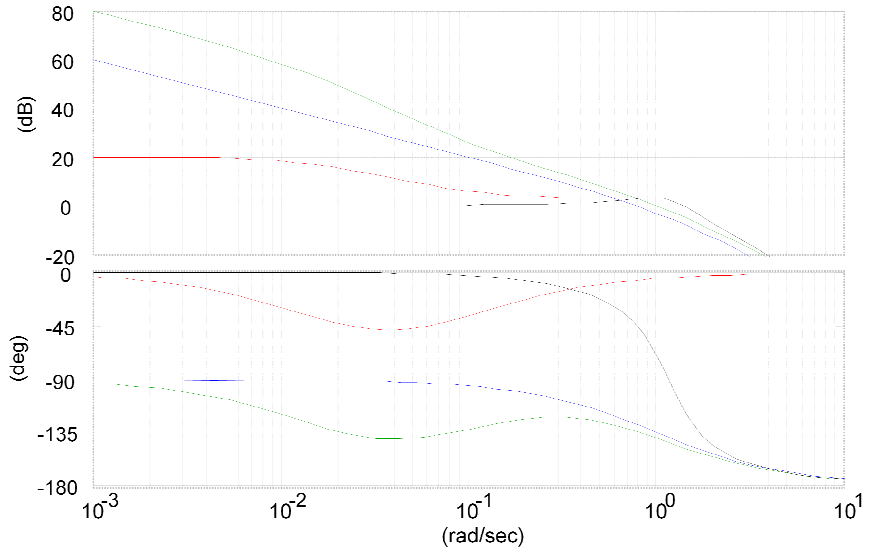
پس صفرِ جبران‌ساز در $\frac{1}{10} = \frac{\omega}{10}$ و قطبِ آن در $\frac{1}{70} = \frac{\omega}{10a}$ تعیین می‌شود. بهرهٔ ثابت نیز که قرار بود 10 باشد و لذا جبران‌ساز خواهد شد:

$$H(s) = 10\frac{10s+1}{70s+1} \tag{۳۸-۳}$$

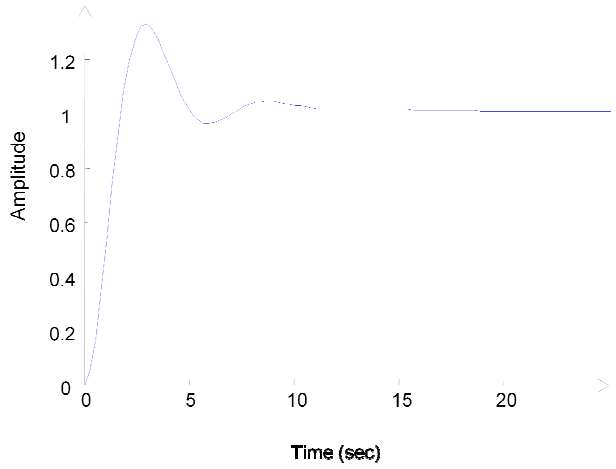
نمایش بودی سامانه هدایتی به همراه جبران‌ساز و همچنین پاسخ پله آن در شکل ۳-۱۸ آمده است.

ملاحظه می‌کنید حد فاز به اندازهٔ 5 درجه کمتر از حد مورد انتظار شده است! ولی باید منتظر این می‌بودیم چراکه حتی با انتخابِ $\frac{1}{10}$ یِ جای صفرِ جبران‌ساز، در این فرکانس هنوز 5 درجه پس‌فازی باقی می‌ماند. پس اگر تأکیدی روی 45 درجه حدفاز داریم لازم است همواره فرکانسِ گذرِ اندازه را جایی بگیریم که این 5 درجه را زیادی داشته باشد. پس مثلاً بهتر بود بگیریم: $\omega = 0.837$ در اینصورت جبران‌ساز دیگری به دست می‌آید که حاصل را به همراه نمایش بودی کلی در شکل ۳-۱۹ آورده‌ایم. بهتر است شما خودتان صحت محاسبات ما را محک بزنید.

$$H(s) = 1.0929\frac{s+0.0837}{s+0.009148} \tag{۳۹-۳}$$

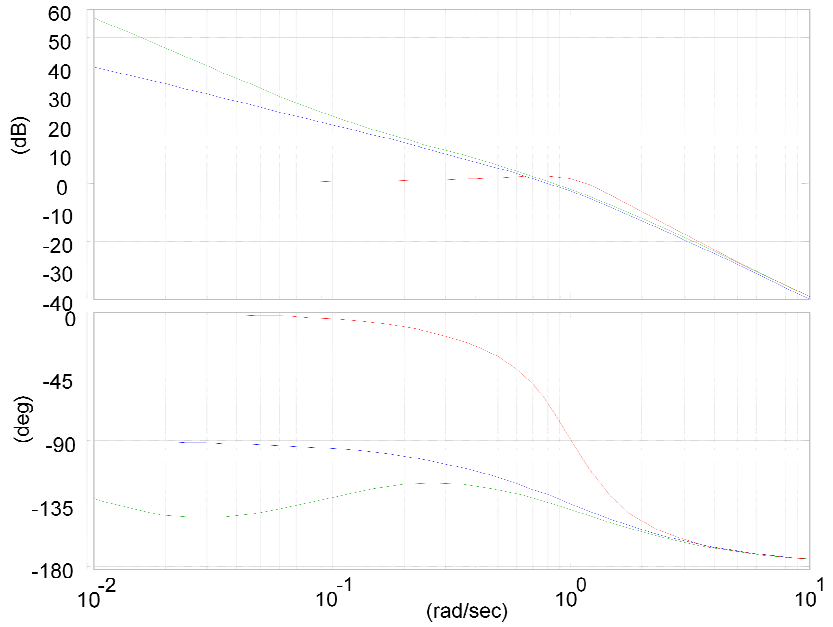


آ

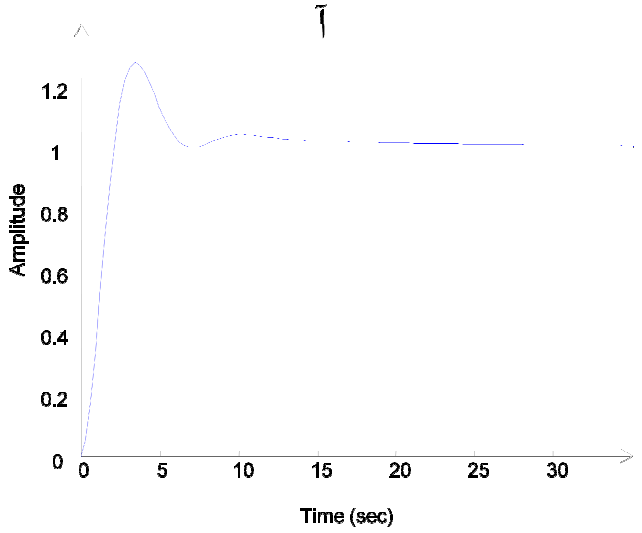


ب

شکل ۳-۱۸- آ. پاسخ فرکانسی مثال ۳-۶ ؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله نتیجه حلقه



آ



ب

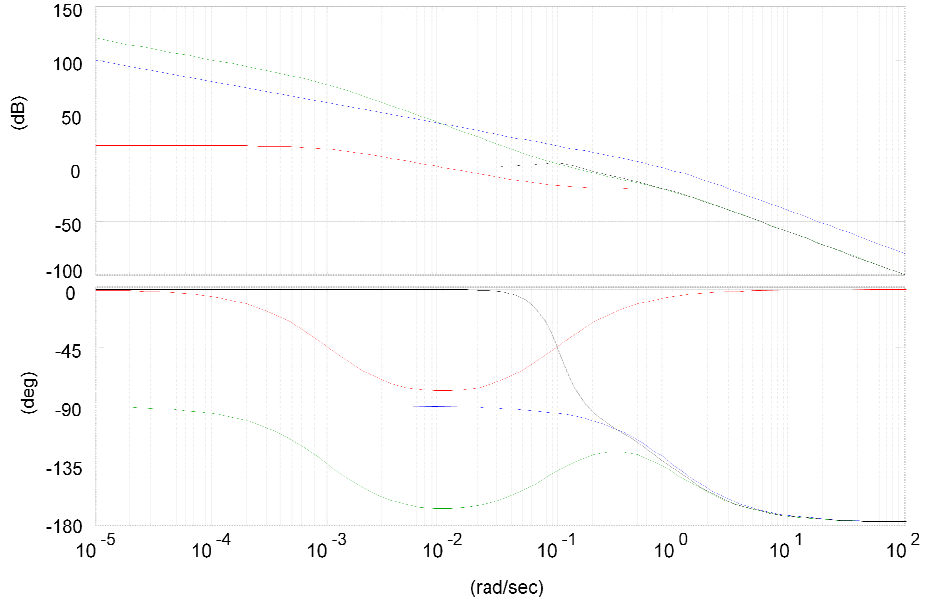
شکل ۳-۱۹- آ. پاسخ فرکانسی مثال ۳-۶ ؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله نتیجه حلقه

مثال ۳-۷-

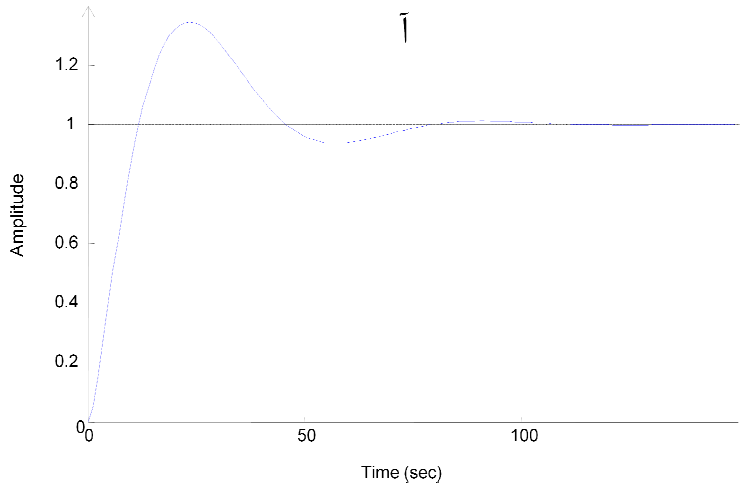
فرض کنیم در مثال ۳-۶ می‌خواهیم اجازه دهیم پسفازی اثر کند و آن را در انتخاب مناسبتر فرکانسِ گذر جبران کنیم. یعنی فرض کنید بخواهیم مثلاً صفر جبران‌ساز را تقریباً روی همین فرکانس گذر انتخاب کنیم. در اینصورت می‌دانیم که این انتخاب، یک پسفازیِ حدود $45°$ ایجاد می‌کند. پس باید فرکانسی را گزینش کنیم که هم‌اکنون حدود $-90°$ درجه فاز داشته باشد که ما اگر فرکانسِ 0.1 را در نظر بگیریم فازش حدود $-95°$ است که یعنی با پسفازیِ $45°$، به فازِ $-140°$ خواهد رسید و این یعنی حدفازی حدودِ $40°$ که شاید کافی باشد!

به این ترتیب جبران‌سازمان صفری در 0.1 خواهد داشت. از طرفی با توجه به اندازه در این فرکانس که هم‌اکنون 10 است، پس $a = \frac{z}{p} = 10 \times 10 = 100$ خواهد شد و لذا قطب جبران‌ساز به طور ناچار در 0.001 قرار خواهد گرفت. خلاصه جبران‌ساز خواهد شد:

$$H(s) = 0.1\frac{s+0.1}{s+0.001} \qquad (۴۰-۳)$$



آ



ب

شکل ۳-۲۰- آ. پاسخ فرکانسی مثال ۳-۷؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله نتیجه حلقه فرکانسی

تمرین ۳-۱۰-

در هر یک از سه طراحیِ مثال‌های ۳-۵ تا ۳-۷، از رویِ فرکانس گذرِ اندازه، پهنای باند و حدفاز نهاییِ به دست آمده، زمان نشست، زمان خیز و فراجهش و نوسانات مورد انتظار را با تبدیل این دو حوزه به یکدیگر به دست آورید و با آنچه واقعاً در پاسخ پله حاصل شده است، محک بزنید و بحث کنید.

تمرین ۳-۱۱-

دربارهٔ تفاوت این سه طراحی در به درازا کشیدنِ پاسخ مانایِ حاصل بحث کنید.

تمرین ۳-۱۲-

تمرین ۲-۴۵ از فصل طراحی در حوزه زمان را با طراحیِ فرکانسی انجام دهید.

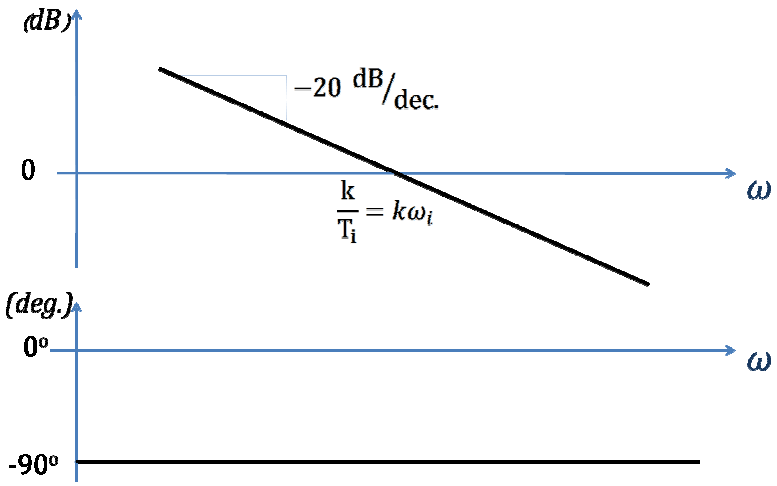
۳-۷- طراحی جبران‌ساز PID

در فصل پیش در مباحث مربوط به طراحی در حوزهٔ زمان با این جبران‌ساز به خوبی آشنا شده‌اید. در اینجا فقط ویژگی‌های فرکانسیِ انواعِ آنها مورد توجه قرار می‌گیرد و با توجه به آنها به طراحی در حوزهٔ فرکانس خواهیم پرداخت.

جبران‌ساز P همان جبران‌ساز بهرهٔ تنهاست و لذا نکتهٔ تازه‌ای ندارد. جبران‌ساز Iایِ تنها نیز اضافه نمودنِ یک جمعگر خالص است به همراهِ بهره:

$$H(s) = k\frac{1}{T_i s} \qquad (۴۱-۳)$$

نمایش بودیِ این جبران‌ساز در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۱- پاسخ فرکانسی جبران‌ساز I $(H_I(s) = k\frac{1}{T_i s})$

با توجه به شکل معلوم است که با استفاده از این جبران‌ساز در تمامِ فرکانس‌ها $90°$ پس‌فازی ایجاد می‌گردد. یعنی در هیچ فرکانسی بهبودِ فاز ندارد بلکه در همه جا به مقدار مساوی فاز را تخریبِ می‌کند. پس با این جبران‌ساز می‌توانید به آسانی هر فازی که در سامانهٔ تحتِ هدایت می‌بینید را $90°$ کاهش دهید و ببینید که چه خواهد شد.

برای استفاده از جبران‌ساز I باید ببینید با احتسابِ این پس‌فازی چه فرکانسی حدفاز مطلوب شما را می‌دهد! و آن را مجبورید فرکانسِ گذرِ اندازهٔ خود بگیرید. حال باید بهره را نیز

طوری قرار دهید تا اندازه، در این فرکانس برابر با واحد بشود! این مقدار نیز در اینجا به وسیلهٔ هر دو مشخصهٔ k و T_i به صورت هم‌زمان تعیین می‌گردد.

مثال ۳-۸-

سامانهٔ مرتبهٔ اول با قطب سادهٔ پایدار $\frac{10}{s+10}$ را در نظر بگیرید و سعی کنید با استفاده از جبران‌ساز I تنها، خطا را به ورودیِ ثابت صفر کنید. این کار به زبان حوزهٔ زمان یعنی خطای ماندا به ورودیِ پله را صفر کنید. در عین حال سعی کنید پهنای باندتان بیشینه گردد ولی حدفاز از $30°$ کمتر نگردد.

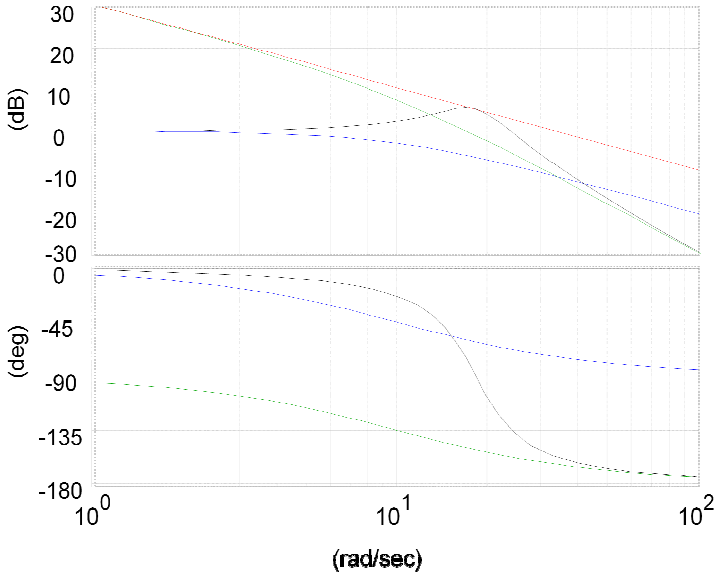
می‌دانید که باید ببینیم با کاهش $90°$ فاز، در کجا به حدودِ $-150°$ می‌رسیم!؟ یعنی باید جایی که فاز سامانه بدون جبران‌ساز $-60°$ است را بیابیم:

$$\tan^{-1}\frac{\omega}{10} = 60° \rightarrow \frac{\omega}{10} = \sqrt{3} \rightarrow \omega \cong 17 \qquad (۴۲-۳)$$

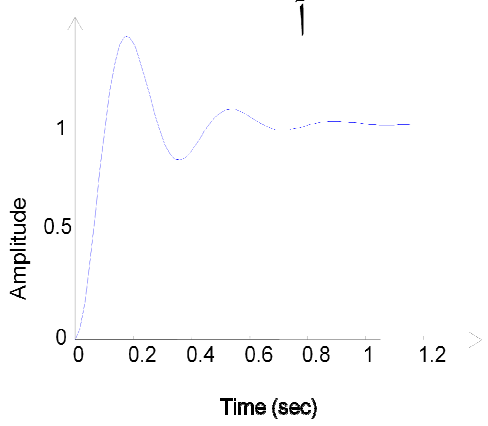
حال باید برویم سراغ اندازه! اندازه در این فرکانس به همراهِ جبران‌ساز باید واحد بشود:

$$\left(\frac{10}{\sqrt{17^2+10^2}}\right)\cdot\left(\frac{k}{T_i}\cdot\frac{1}{17}\right) = 1 \rightarrow \frac{k}{T_i} = 33.5 \qquad (۴۳-۳)$$

حاصلِ چنین طراحی را در شکل ۳-۲۲ آورده‌ایم.



آ



ب

شکل ۳-۲۲- آ. پاسخ فرکانسی مثال ۳-۸؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله نتیجه حلقه

۳-۷-۱- طراحیِ جبران‌ساز PI

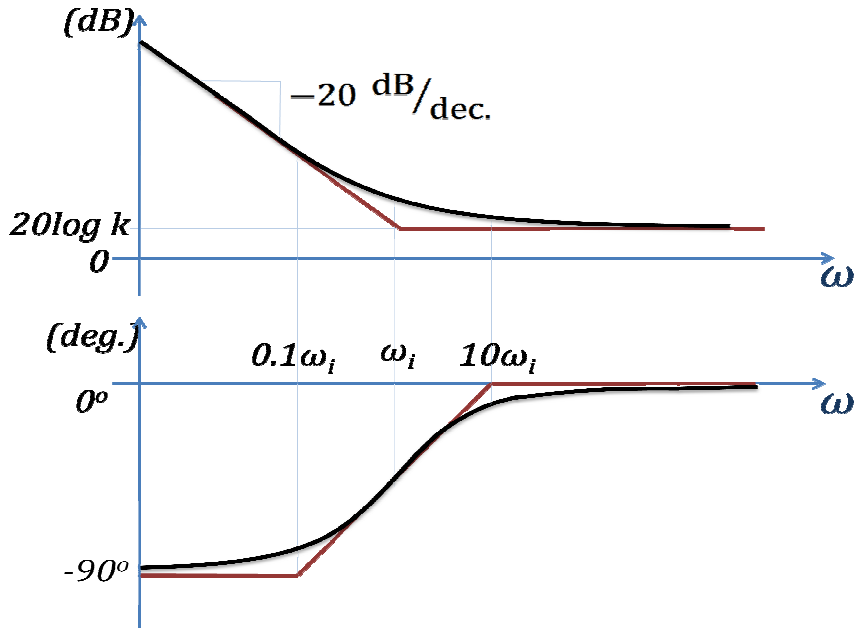
ابتدا نمایش بودی شبکه PI را ـ که تابع تبدیل آن در رابطه (۳-۴۴) نشان داده شده است ـ در حالت کلی رسم می‌کنیم تا رفتار فرکانسیِ آن را بر حسبِ مشخصه‌هایش بشناسیم. ابتدا دربارهٔ اندازه توجه می‌کنیم که با شیبِ $-20dB$ در حال نزول است. اما تا کجا؟!

$$H(s) = k\left(1 + \frac{\omega_i}{s}\right) = k\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = k\frac{s+\omega_i}{s} \qquad (۴۴-۳)$$

تا جایی که صفرِ آن قرار دارد یعنی: $\frac{1}{T_i} = \omega_i$. اما این فرکانسی است که نزول اندازه متوقف می‌شود(شکل ۳-۲۳ را نگاه کنید). از این فرکانس اندازه به مقدار بهره پرش می‌رسد و در آن ثابت می‌ماند.

حال برویم سراغ تغییرات فاز این جبران‌ساز! روشن است که به دلیل قطب در مبدأ یا همان جمعگر خالصِ موجود، یک فازِ $-90°$ از همان ابتدا در کار است ولی این فاز ثابت تا کجا ادامه دارد؟!

از حدود $\frac{1}{10}$ فرکانس صفرِ جبران‌ساز، جبران این فاز شروع می‌شود به طوری که در 10 برابرِ آن تقریباً فقط 5 درجه تا جبران کاملِ آن، باقی می‌ماند. یعنی از فرکانسِ $\frac{1}{10}\omega_i$ تا $10\omega_i$ ، آن پس‌فازیِ $90°$ جبران خواهد شد و در فرکانس ω_i دقیقاً نصفِ آن یعنی $45°$ جبران شده است. حال شکل ۳-۲۳ باید کاملاً برای شما روشن شده باشد.



شکل ۳-۲۳- پاسخ فرکانسی (نمایش بودی) شبکه جبران‌ساز PI

همین‌جا کاملاً روشن است که فقط هنگامی باید از این جبران‌ساز استفاده نمود که می‌خواهیم خطایِ ورودیِ در جنسِ فرکانس صفر را یک مرتبه کاهش دهیم. یعنی یا خطایِ به ورودیِ ثابت را می‌خواهیم صفر کنیم یا به ورودیِ شیب را ثابت و یا پاسخ به سهمی را شیب و ....

صفرِ در $-\omega_i$ اثر منفیِ قطب در مبدأ را جبران می‌کند. این اثر منفی همان پس‌فازیِ $90°$ است. پس پر واضح است که این جبران‌ساز هیچ جبرانی در فاز ندارد بلکه فقط خرابکاریِ خود را در فرکانسِ حدودِ $10\omega_i$ جبران کرده است. لذا برای گزینشِ فرکانس گذرِ اندازهٔ نهایی باید به فازِ کنونیِ سامانهٔ تحت هدایت توجه کرد و فرکانسِ مناسبی را یافت. برای این کار به طور کلی می‌توان دو عملکرد را دنبال کرد! یا جایی را که هم‌اکنون حدفاز مطلوب دارد، برمی‌گزینیم یا جایی

که مقدار فاز در آن بیش از حد فاز مطلوب است. با انتخاب دوم بعداً کمی اجازه خواهیم داد فاز توسطِ جبران‌ساز تخریب شود و به مطلوب برسد.

قاعدتاً با افزایشِ فرکانس، فاز کم و حدفاز بدتر می‌شود، پس برای رسیدن به پهنای باندِ بزرگتر، معمولاً عملکرد اول را برمی‌گزینیم.

اما به هر حال پس از این گزینشِ ω، باید مراقبت کنیم که ω_i را جایی بگذاریم تا در فرکانسِ بالا تعیین شده، فاز به اندازهٔ لازم و کافی جبران شده باشد. به این ترتیب است که ω_i دقیقاً تعیین می‌گردد. مثلاً $\omega_i = \frac{1}{10}\omega$.

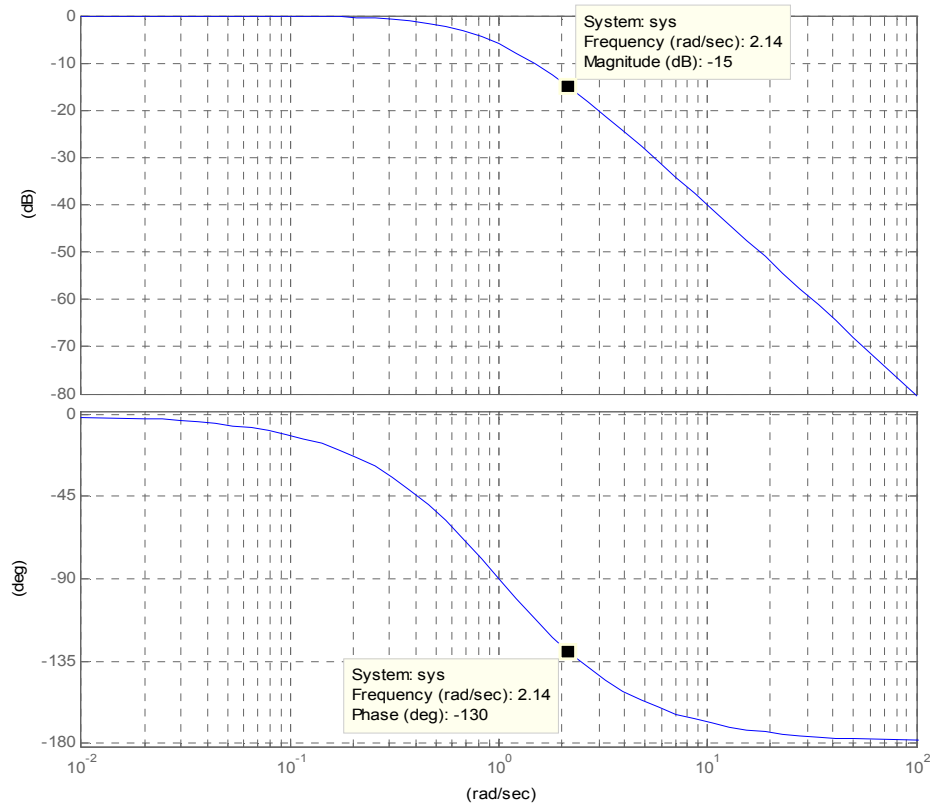
در ادامه کافیست k را طوری تعیین کنیم که این فرکانس(ω)، فرکانسِ گذرِ اندازه گردد. به این ترتیب با تعیینِ هر دو مشخصهٔ این جبران‌ساز کار طراحی تمام است.

مثال ۳-۹-

برای سامانهٔ مرتبهٔ دوم $\frac{1}{(s+1)^2}$ یک PI طراحی کنید که البته بیشترین پهنای باند را نیز به دست آوریم.

حل: ابتدا پاسخ فرکانسی (نمایش بودی) را مطابق با شکل ۳-۲۴ رسم می کنیم. با توجه به منحنی فاز، فرکانسی را که هم‌اکنون فاز مناسبی برای فرکانس گذرِ اندازه شدن دارد برمی‌گزینیم. مثلاً اگر حدفازِ $45°$ کفایت می‌کند، (و می‌دانیم به اندازهٔ $5°$ نیز بعداً کم خواهد شد) بیشترین فرکانسی که آن را ارضا کند، به صورت جبریِ زیر به دست می‌آید (البته می‌شد از روی شکل نیز به طور تقریبی آن را یافت):

$$-2\tan^{-1}\omega = -130 \quad \rightarrow \quad \omega = tan\,65 = 2.14 \qquad (۴۵-۳)$$



شکل ۳-۲۴- نمایش بودی تابع تبدیل$\frac{1}{(s+1)^2}$؛ مثال۳-۹

این مقدار را فرکانس گذر اندازه در نظر می‌گیریم. از روی همین انتخاب هر دو مشخصهٔ جبران‌ساز PI به دست می‌آیند. اول اینکه، صفرِ جبران‌ساز یعنی ω_i را باید در $\frac{1}{10}$ ی آن قرار دهیم یعنی:

$$\omega_i = 0.214 \quad \rightarrow \quad T_i = 4.673 \qquad (۴۶-۳)$$

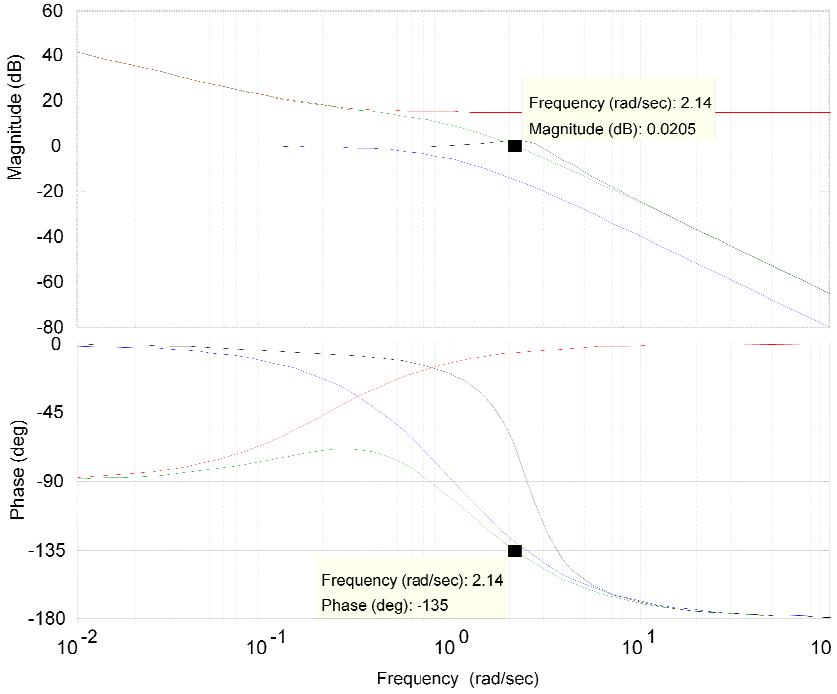
دوم اینکه بهرهٔ k طوری باید تعیین گردد تا آن فرکانسِ منتخب، فرکـانسِ گـذر انـدازه گردد، یعنی:

$$k \cdot \frac{1}{2.14^2+1} = 1 \quad \rightarrow \quad k = 5.58 \tag{۴۷-۳}$$

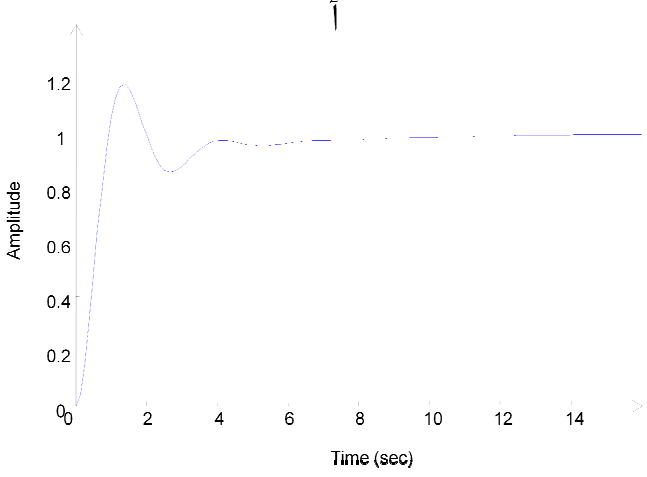
و نهایتاً جبران‌ساز عبارتست از:

$$H(s) = 5.58 \left(1 + \frac{1}{4.673\ s}\right) \tag{۴۸-۳}$$

نتیجهٔ نهایی در شکل ۳-۲۵ آورده شده است. چنانچه ملاحظه می‌کنید به خوبی حـدفازِ $45°$ به دست آمده است درحالی که روشن است که پهنایِ باند(فرکانس گذر اندازه) را نیز نمی‌شد از این بزرگتر نمود!



آ



ب

شکل ۳-۲۵- پاسخ فرکانسی مثال ۳-۹ ؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله نتیجه حلقه

مثال ۳-۱۰-

در همان مثال قبل اگر کسی بخواهد از دستیابی به حداکثر پهنای باند صرف نظر کند، می‌تواند به جایِ $5°$ تصحیح، مثلاً $45°$ بگیرد و ω_i را همان فرکانس گذرِ اندازه بگزیند. در این صورت باید:

$$-2\tan^{-1}\omega = -90° \quad \rightarrow \quad \omega = \tan 45° = 1 \qquad (۴۹-۳)$$

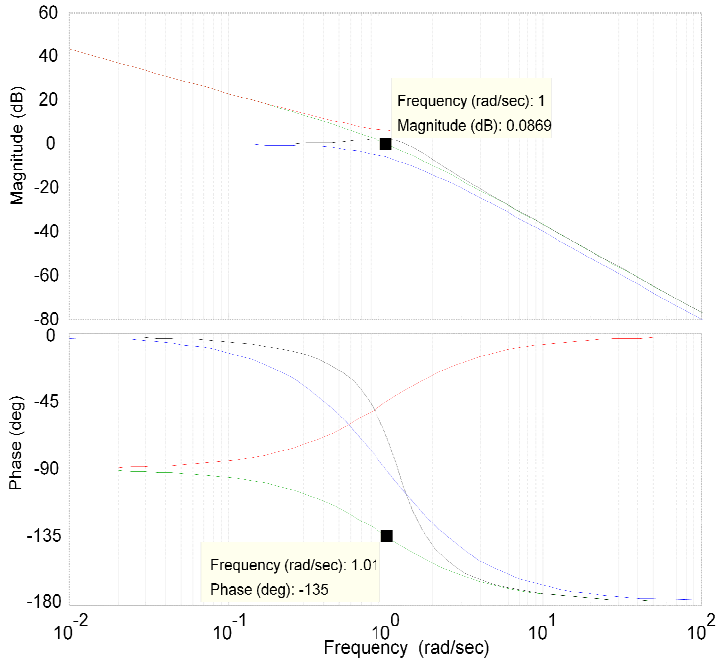
که البته حالا در اینجا، همین فرکانس، فرکانس گذر اندازه نیز باید گردد، یعنی:

$$\omega_i = 1 \quad \rightarrow \quad 0.7\,k \cdot \frac{1}{1^2+1} = 1 \quad \rightarrow \quad k = 1.43 \qquad (۵۰-۳)$$

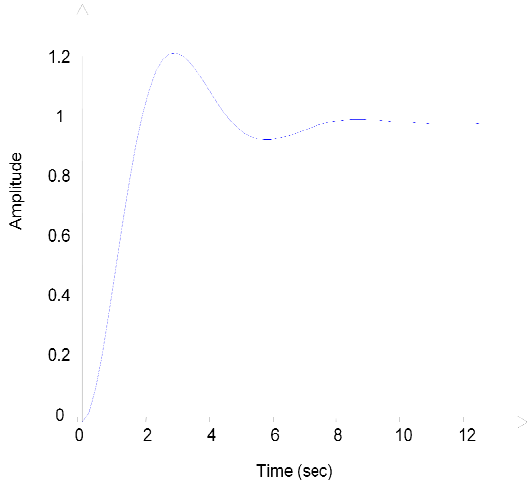
دقت کنید که 0.7 به دلیل این است که درست در فرکانس شکستِ جبران‌ساز هستیم. به این ترتیب جبران‌ساز خواهد بود:

$$H(s) = 1.43\left(1+\frac{1}{s}\right) = 1.43\frac{s+1}{s} \qquad (۵۱-۳)$$

نتایج نهایی شامل پاسخ فرکانسی و پاسخ پله سامانه هدایتی در شکل ۳-۲۶ آورده شده است. همان گونه که انتظار می‌رفت، پهنای باند کمی کاهش یافته است. این کاهش در حوزهٔ زمان، خود را در پاسخ پله نشان می‌دهد. می‌بینید سرعت در مقایسه با آن چه در شکل ۳-۲۵ نشان داده شد، کمی کاهش یافته است.



آ



ب

شکل ۳-۲۶- آ. پاسخ فرکانسی مثال۳-۱۰ با جبران‌ساز $1.43\frac{s+1}{s}$؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه. ب. پاسخ پله سامانه هدایتی

تمرین ۳-۱۳-

با توجه به پاسخ‌ها (هم پاسخ فرکانسی و هم زمانی) دربارهٔ دو طراحی و فرق‌هایشان بحث کنید.

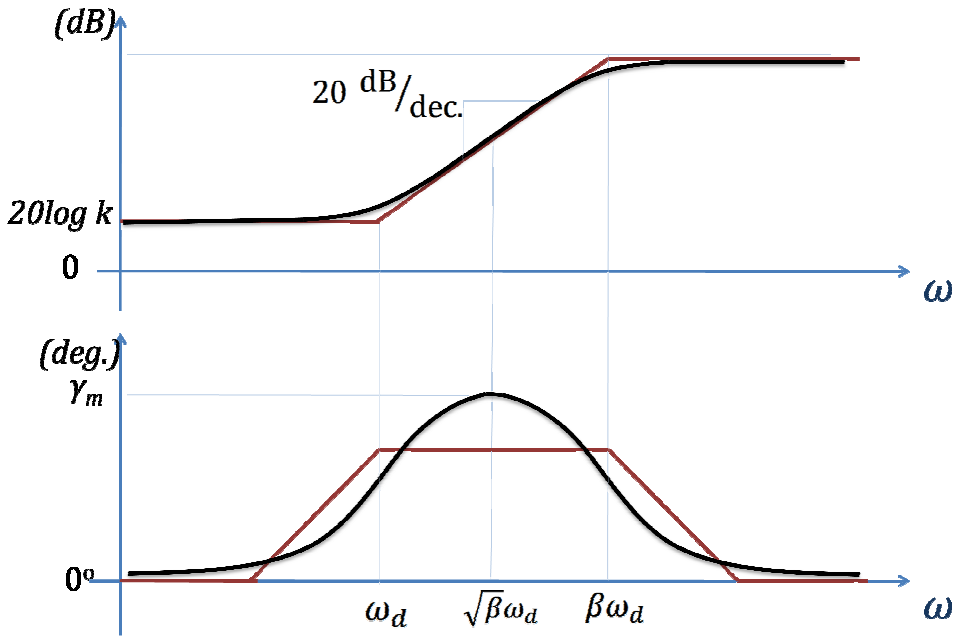
۳-۷-۲- طراحیِ PD

در این بخش باز هم به نمایش بودی پاسخ فرکانسیِ این جبران‌ساز می‌پردازیم. در شکل ۳-۲۷ سعی شده است رسم بر حسب مشخصه‌ها صورت گیرد.

$$k\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{\beta}s+1}\right)\cong k\left(\frac{T_d s+1}{\frac{T_d}{\beta}s+1}\right) \qquad (۵۲-۳)$$

توجه کنید که در اینجا، k،بهرهٔ ثابت تابع تبدیل است در حالی که در PI این مقدار بیانگر بهرهٔ پرش بود! همان طور که در شکل مشاهده می‌شود اندازه جبران‌ساز PD از فرکانسِ صفر($\omega_d=\frac{1}{T_d}$)، تا فرکانس قطب (β برابرِ جایِ صفر)با شیبِ $20\frac{dB}{dec.}$ افزایش می‌یابد. رفتار این جبران‌ساز، کاملاً شبیهِ یک پیش‌فاز است ولی با یک ضریبِ پیشفازیِ ثابتِβ که عموماً حدودِ 10 انتخاب می‌گردد. مقدارِ بیشینهٔ پیش‌فازی به این ترتیب به دست می آید:

$$\gamma_m=sin^{-1}\frac{10-1}{10+1}=sin^{-1}\frac{9}{11}=55° \qquad (۵۳-۳)$$



شکل ۳-۲۷- نمایش بودی جبران‌ساز PD

و همچنین این پیشفازی در حدود فرکانس ω_m اتفاق می افتد:

$$\omega_m = \sqrt{\beta\omega_d^2} \cong 3\omega_d \qquad (۵۴-۳)$$

برای طراحی این جبران‌ساز ابتدا لازم است فرکانس گذرِ اندازهٔ آتی را معین کنیم. قاعدتاً این فرکانس جایی است که هم‌اکنون به فازِ اضافی نیاز دارد و قرار است PD، آن را تأمین کند. در ضمن دانستیم که جبران‌ساز در بیشینهٔ خود حدود $55°$ فاز اضافه می کند پس نباید بیش از این

توقع داشته باشید. مثلاً اگر حدفازِ $65°$ می‌خواهید باید فرکانسی را در نظر بگیرید کـه هـم‌اکنـون بدونِ جبران‌ساز، حدود $10°$ حدفاز داشته باشد یعنی فاز آن حدودِ $-170°$ باشد!

روشن است که باید ابتدا این فرکانس را بالاخره با توجه به حقایق بـالا و سـامانهٔ تحـت هدایت، نهایی کنید (مثلاً ω). پس از این، کار بسیار ساده پیش خواهد رفت. معلوم مـی‌شـود کـه باید ω_d را حدودِ $\frac{1}{3}$ آن قرار داد یعنی:

$$\omega_d \cong \frac{1}{3}\omega \qquad (۵۵-۳)$$

پس به این ترتیب یکی از دو مشخصهٔ جبران‌ساز تعیین می‌گردد و سپس کافیست برای تعیینِ بهرهٔ k نیز توجه کنیم که برای اینکه در فرکانسِ ω گذرِ اندازه اتفاق افتد باید:

$$k\sqrt{\beta}\cdot\left\{\text{اندازهٔ سامانهٔ تحت هدایت}\right\}_{\omega} = 1 \qquad (۵۶-۳)$$

مثال ۳-۱۱-

برایِ هدایت همان تابع تبدیل $\frac{1}{(s+1)^2}$ ، یک PD طراحی می‌کنـیم کـه حـدفازی حـدود $65°$ نیز داشته باشد.

کافیست با توجه به پاسخ فرکانسیِ سامانهٔ تحت هدایت (شـکل ۳-۲۴) ببینـیم در کجـا هم‌اکنون فازی حدودِ $-170°$ داریم؟!

$$-170° = -2\tan^{-1}\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \tan 85° = 11.4 \qquad (۵۷-۳)$$

پس برای فرکانسِ صفر جبران‌ساز باید قرار دهیم:

$$\omega_d \cong \frac{1}{3}\omega \cong 4 \qquad (۵۸-۳)$$

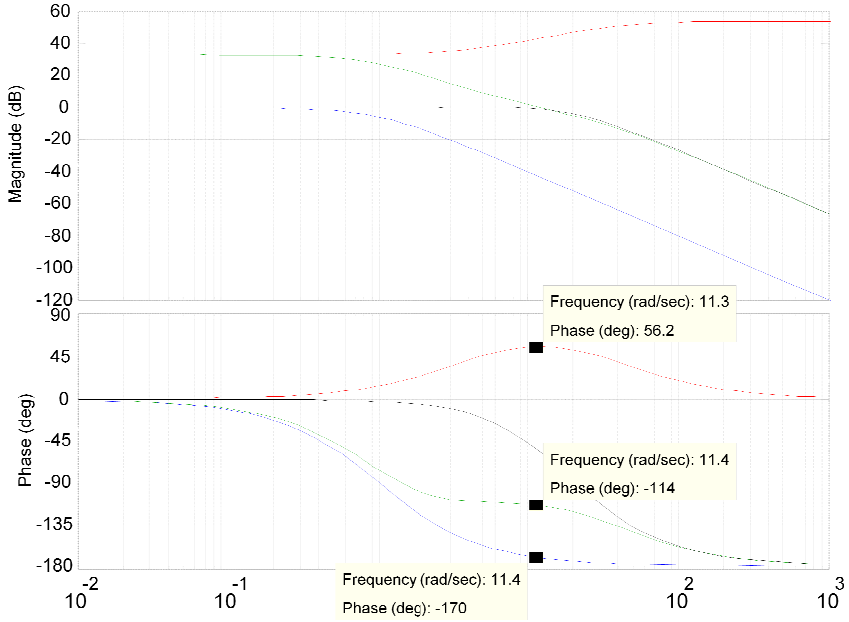
و اما برای k همان گونه که بالاتر رفت، داریم:

$$3k\frac{1}{11.4^2+1} = 1 \;\rightarrow\; k = 44 \qquad (۵۹-۳)$$

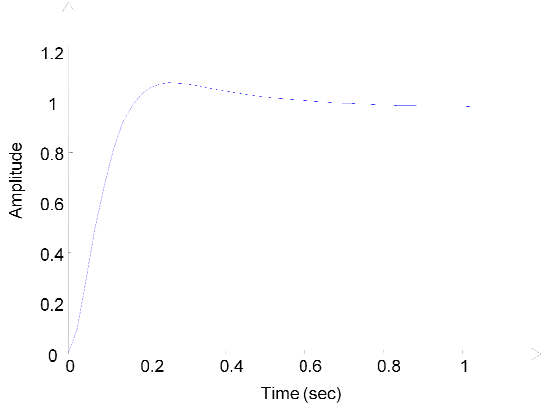
لذا جبران‌ساز خواهد شد:

$$H(s) = 44\left(1 + \frac{0.25s}{0.025s+1}\right) \qquad (۶۰-۳)$$

نتایج نهایی در شکل ۳-۲۸ آورده شده‌اند.



آ



ب

شکل ۳-۲۸- آ. پاسخ فرکانسی مثال۳-۱۱؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه.
ب. پاسخ پله نتیجه حلقه

۳-۷-۳- طراحیِ *PID*

در این قسمت نیز مانند بخش مربوط به طراحیِ حوزهٔ زمان، با مشخصه‌های تحققِ سری کار خواهیم کرد. عموماً مشخصه‌های تحقق سری(یعنی کلاه‌دارها) در عمل مورد استفاده نیستند و تنظیمات با ادبیاتِ مشخصه‌های موازی صورت می‌گیرد. اما چنانچه در اینجا نیز خواهید دید، دیدنِ سریِ این جبران‌ساز، کار طراحی را بسیار آسان می‌کند چراکه به آسانی می‌توان طراحیِ PID را به طراحیِ یک PD و یک PI تجزیه نمود. یادآور می‌شود که هرگاه بتوان کلاه‌دارها(مشخصه‌های سری) را تعیین نمود، به آسانی از رویِ آنها می‌توان بی‌کلاه‌ها(مشخصه‌های موازی و کاربردی) را از روابطی که در بخش مربوطه به دست آمد، تعیین نمود. این روابط را برای یادآوری در اینجا نیز آورده‌ایم.

$$k\left(\frac{T_iT_ds^2+T_is+1}{T_is\left(\frac{T_d}{\beta}s+1\right)}\right)=\hat{k}\left(\frac{(\hat{T}_is+1)(\hat{T}_ds+1)}{\hat{T}_is\left(\frac{\hat{T}_d}{\hat{\beta}}s+1\right)}\right) \qquad (۶۱-۳)$$

مساوی قرار دادنِ بهرهٔ پرش و بهرهٔ ثابت و صفر و قطب‌ها در دو طرف، نتایج زیر را به بار خواهند آورد:

$$k\beta=\hat{k}\hat{\beta} \qquad (۶۲-۳)$$

$$\frac{k}{T_i}=\frac{\hat{k}}{\hat{T}_i} \qquad (۶۳-۳)$$

$$\frac{T_d}{\beta}=\frac{\hat{T}_d}{\hat{\beta}} \qquad (۶۴-۳)$$

$$T_iT_d=\hat{T}_i\hat{T}_d \qquad (۶۵-۳)$$

$$T_i = \hat{T}_i + \hat{T}_d \qquad (۶۶-۳)$$

روشن است که یکی از تساوی‌های بالا زیادی است. چون جای صفرها مهم‌ترین است، لذا از دو تساویِ آخر که مستقل از بقیه حل می‌شوند، شروع می‌کنیم. پاسخ از یک سو به دیگری و برعکس، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} T_i = \hat{T}_i + \hat{T}_d \to \omega_i = \frac{\hat{\omega}_i \hat{\omega}_d}{\hat{\omega}_i + \hat{\omega}_d} \\ T_d = \frac{\hat{T}_i \hat{T}_d}{\hat{T}_i + \hat{T}_d} \to \omega_d = \hat{\omega}_d + \hat{\omega}_i \end{cases} \qquad (۶۷-۳)$$

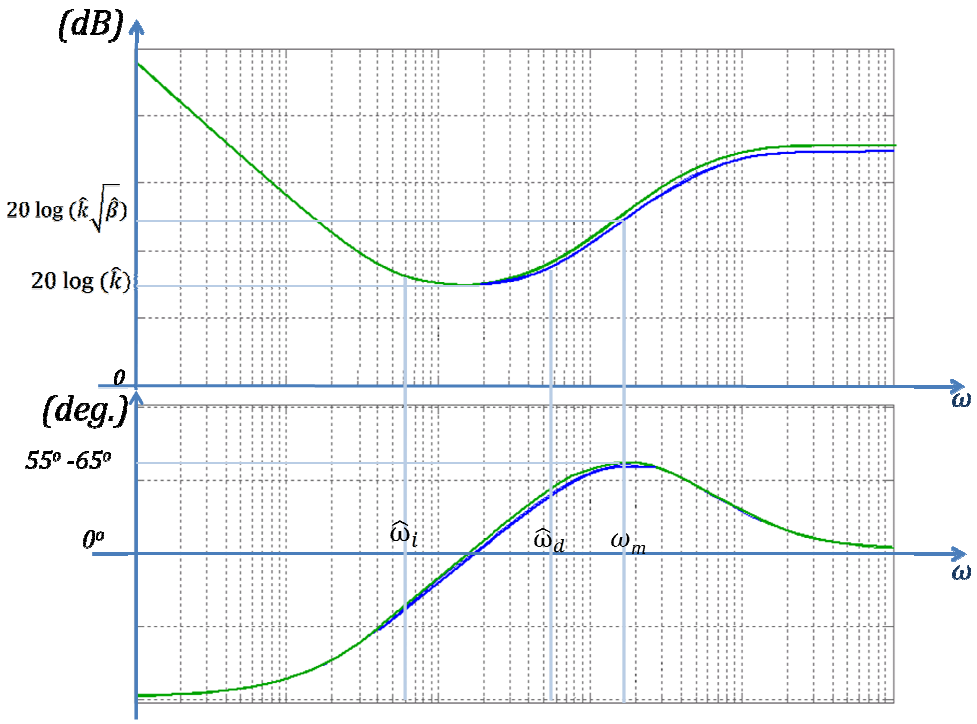
اما بقیهٔ نتایج به شرح زیر خواهند بود:

$$\frac{k}{\hat{k}} = \frac{\hat{\beta}}{\beta} = \frac{T_i}{\hat{T}_i} = \frac{\hat{T}_d}{T_d} \qquad (۶۸-۳)$$

$$\hat{\beta} = \beta\left(1 + \frac{\hat{T}_d}{\hat{T}_i}\right) \qquad (۶۹-۳)$$

این عبارت آخری مهم است چون نشان می‌دهد، شبکهٔ پیشفازِ سری دارای ضریبِ a بزرگتری است و این بزرگی نیز حداکثر به دو برابر می‌رسد. لذا اگر β را عموماً 10 می‌گیریم، پس $\hat{\beta}$ را می‌توان حتی تا 20 نیز در نظر گرفت!

برای یافتنِ روشِ مناسبی برای طراحی، ابتدا توجه می‌کنیم به نمایش بودیِ الگوی سری که دقیقاً عبارتست از دو الگویِ PI و PD به هم چسبیده! در شکل زیر سعی شده است که این جبران‌ساز با مشخصه‌هایِ $\hat{k}$, $\hat{\beta}$, $\hat{T}_d$ و $\hat{T}_i$ دیده شود.



شکل ۳-۲۹- نمایش فرکانسی جبران‌ساز PID با هر دو تحقق سری و موازی

در اینجا چون ضریبِ پیشفازی، کمی بزرگتـر از ده و در بـازهٔ $20 \leftrightarrow 10$ بایـد در نظـر گرفته شود، لذا برای فرکانسی که بیشینهٔ پیشفازی پیش می‌آید و مقدار این بیشینه خواهیم داشت:

$$sin^{-1}\frac{20-1}{20+1} = 65° \rightarrow 55° \leftrightarrow 65° \quad , \omega_m = (3.5 \leftrightarrow 4.5)\hat{\omega}_d \qquad (۷۰-۳)$$

ملاحظه می‌کنید که برای بیشترین پیشفازی به چیزی حدودِ $60°$ باید قناعت کنیم. پس با تعیینِ مناسبِ جایی که می‌خواهیم فرکانسِ گذر اندازه شود و لابد پیشفازیِ بالا را نیز نیاز دارد، در واقع ω_m مشخص می‌گردد و سپس بقیهٔ موارد از روی آن به دست می‌آیند. ولی توجه کنید که

شما در مشخصه‌ها چیزی به نامِ ω_m ندارید بلکه آن را باید با ملاحظهٔ عبارت بالا به تعیینِ دقیقِ $\widehat{\omega}_d$ تبدیل کنید.

پس از این لازم است بهرهٔ $\hat{k}$ ، طوری نهایی شود تا فرکانسِ مورد نظر، فرکانس گذر اندازه بشود. که کاملاً مشابهِ طراحیِ PD انجام می‌پذیرد.

$$\hat{k}\sqrt{\hat{\beta}} \cdot \left\{\text{اندازهٔ سامانهٔ تحت هدایت}\right\}_{\text{در فرکانس گذر منتخب}} = 1 \qquad (۷۱-۳)$$

$$\hat{k}\sqrt{\hat{\beta}} \approx 4\hat{k} \quad \rightarrow \quad \hat{k} \cong 0.25 \frac{1}{\left\{\text{اندازهٔ سامانهٔ تحت هدایت}\right\}_{\text{در فرکانس گذر منتخب}}} \qquad (۷۲-۳)$$

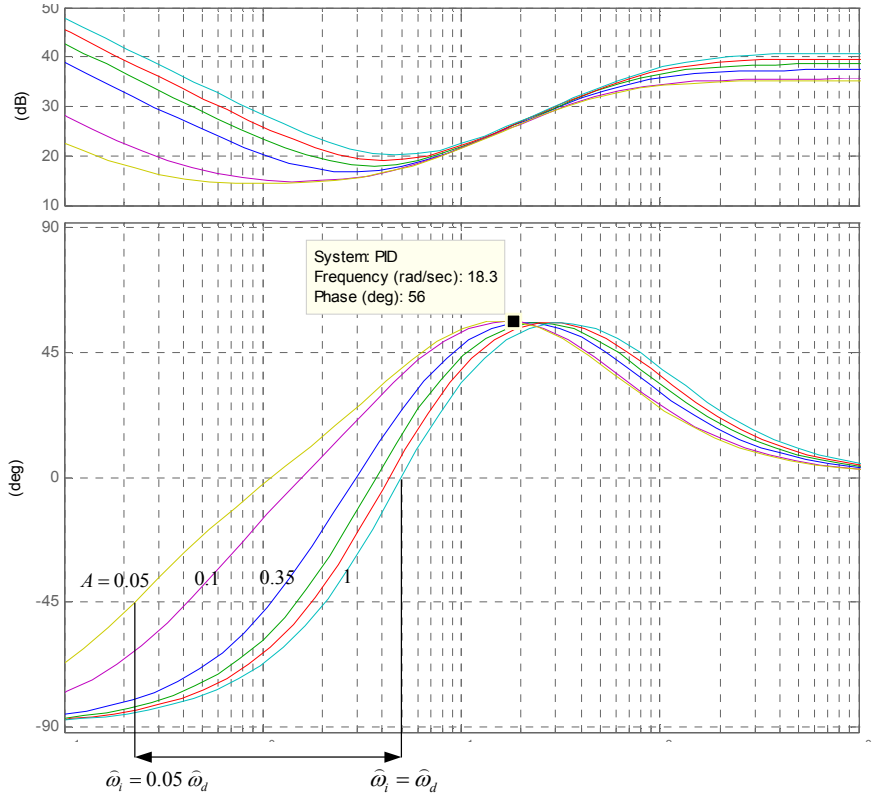
می‌ماند $\widehat{\omega}_i$ که باید تعیین گردد. پیشتر در طراحیِ PI دیدیم که مهمترین نکته این است که اینجا باید از فرکانسِ گذر منتخب، به اندازهٔ کافی دور باشد تا اثر فازِ منفیِ جمعگر خالص را از بین برده باشد. اما همان گونه که در آنجا نیز مطرح کردیم، از طرف دیگر علاقه‌مند تا بهرهٔ افزایشیِ جمعگر، از فرکانس‌هایِ زودتری نیز شروع گردد تا کاهشِ خطا، شاملِ فرکانس‌های بیشتری در ناحیهٔ عبور گردد.

برای فهم بهتر این مصالحه، ابتدا توجه کنید که برای بیشترین کاهشِ اثرِ پس‌فازی، گزینهٔ مناسب، فرکانسی است حدودِ $\frac{1}{10}\omega_m = 0.35\widehat{\omega}_d$. که با این گزینه، حداکثر چیزی حدود $5°$ از پس‌فازی می‌ماند. از طرف دیگر، برای بهره‌مند نمودنِ فرکانس‌های بیشتری در ناحیهٔ عبور از بهرهٔ جمعگر، بزرگترین انتخابِ ممکن، خودِ فرکانسِ $\widehat{\omega}_d$ است. پس گزینشِ $\widehat{\omega}_i$ نسبت به $\widehat{\omega}_d$، در حدود زیر است:

$$\widehat{\omega}_i = (0.35 \leftrightarrow 1)\widehat{\omega}_d = A\widehat{\omega}_d \qquad (۷۳-۳)$$

حال بیایید پاسخ فرکانسیِ این جبران‌ساز را با این گزینه‌هایِ گوناگون مورد توجه قرار دهیم. در شکل ۳-۳۰، این پاسخ، برای چند گزینهٔ در فاصلهٔ بالا به دست آمده، رسم شده است.

خوب توجه کنید که هر چه $\widehat{\omega}_i$ را نزدیکتر به $\widehat{\omega}_d$ انتخاب کنیم، اوضاع در ناحیهٔ عبور مناسبتر می‌شود، چراکه ازدیاد بهره زودتر شروع شده و فرکانس‌های بیشتری را شامل می‌گردد. و اما دربارهٔ اثرِ پسفازی، دقت کنید که این پسفازی در $\widehat{\omega}_i$ دقیقاً $45°$ و در $4\widehat{\omega}_i$ دقیقاً $tan^{-1} 4 = 76°$ جبران شده است و به طور کلی در فرکانسِ $n\widehat{\omega}_i$ به اندازهٔ $tan^{-1} n$ جبران می‌گردد. پس در بدترین انتخاب به لحاظِ پس‌فازی، چیزی حدودِ $90 - 76 = 14°$ از پس‌فازی، در فرکانسِ گذرِ اندازهٔ منتخب، باقی می‌ماند!



شکل ۳-۳۰- رفتار فرکانسی جبرانساز PID به ازای مقادیر مختلف A.

اما نکتهٔ دیگر اینست که درست است که با نزدیک گرفتنِ این دو بـه هـم، پـس‌فـازی، کمتر جبران می‌گردد ولی در عوض پیش‌فازیِ مربوطه در حال افزایش است، چراکه $\hat{\beta}$ از 10 بـه 20 می‌رسد. می‌دانید که این موجب می‌گردد پیش‌فازیِ بیشینه از $55°$ به $65°$ برسد که به طـور سرانگشتی یک جبرانِ $10°$ ای را به همراه دارد!

به این ترتیب پس‌فازیِ باقیمانده به طور متوسط حدود $4°$ است و نه $14°$! اما سـرجمع همان گونه که در شکل مشاهده می‌کنید حتی همین مقداری که سرانگشتی به دست آوردیم نیـز

نخواهد بود و لذا در بسیاری از موارد می‌توان نادیده گرفته و همواره این دو فرکانسِ $\widehat{\omega}_d$ ، $\widehat{\omega}_i$ را مساوی گرفت.

ولی آنچه کار را متفاوت می‌کند ملاحظهٔ اندازه است که باید به دقت مورد توجه قرار گیرد. هر چند مساوی گرفتنِ دو فرکانس در نگاه اول خوب به نظر می‌رسد ولی ممکن است که محدودیت‌های عملی در به کارگیریِ بهرهٔ نهایی موجب گردد که شما به گزینش‌های دیگر تن دهید.

مثال ۳-۱۲-

بیایید همان سامانهٔ دو نمونهٔ گذشته را دنبال کنیم و این بار سعی کنیم که یک PIDی مناسبی برای آن طراحی کنیم که حداکثر پهنای باند را بگیریم و البته حدفازی حدودِ $65°$ نیز داشته باشد.

از همان طراحی PD داریم، که فرکانس گذرِ مناسب حدود 12 است یعنی: $\omega_m \cong 12$ چراکه در اینجا فاز چیزی است حدودِ $-170°$. به این ترتیب $\widehat{\omega}_d = \frac{\omega_m}{4} = 3$ می‌گیریم و $\widehat{\omega}_i = 0.35\widehat{\omega}_d \approx 1$ می‌گیریم.

اما هنوز $\hat{k}$ را تعیین نکرده‌ایم که این هم با توجه به رابطهٔ پیشتر داده شدهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\hat{k}\sqrt{\hat{\beta}} \cdot \left\{\text{اندازهٔ سامانهٔ تحت هدایت}\right\}_{\text{در فرکانس گذر منتخب}} = 1 \qquad (۷۴-۳)$$

و البته حالا چون $\hat{\beta}$ مشخص شده است: $\hat{\beta} = 10\left(1+\frac{1}{3}\right) = 13.3$ ، می‌توان از تقریبِ 0.25 که برای $\frac{1}{\sqrt{\hat{\beta}}}$ داشتیم، استفاده نکرده و از مقدار دقیقِ $\frac{1}{\sqrt{\hat{\beta}}} = \sqrt{13.3} = 0.27$ محاسبه نمود. به این ترتیب داریم:

$$\hat{k} = 0.27\,(1+12^2) \cong 40 \qquad (۷۵-۳)$$

به این ترتیب تحققِ سریِ جبران‌ساز به صورت زیر است.

$$40\frac{(s+1)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{40}s+1\right)} \qquad (۷۶-۳)$$

و تحققِ موازیِ آن نیز به ترتیب زیر به دست می‌آید:

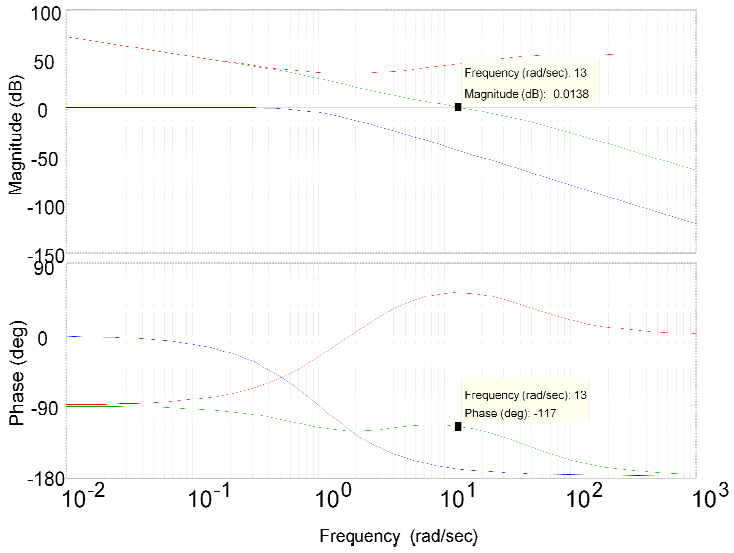
$$T_i = \hat{T}_i + \hat{T}_d = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad (۷۷-۳)$$

$$\omega_d = \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_d = 1+3 = 4 \;\rightarrow\; T_d = \frac{1}{4} \qquad (۷۸-۳)$$

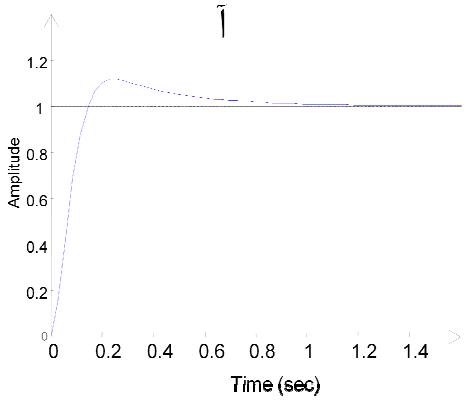
$$k = \hat{k}\frac{T_i}{\hat{T}_i} = 40\frac{4/3}{1} = \frac{160}{3} \qquad (۷۹-۳)$$

$$\rightarrow\; H_{PID}(\mathrm{s}) = \frac{160}{3}\left(1+\frac{1}{\frac{4}{3}s}+\frac{\frac{1}{4}s}{\frac{1}{40}s+1}\right) \qquad (۸۰-۳)$$

در شکل ۳-۳۱نمایش بودی جبران‌ساز، حلقهٔ هدایت و نتیجهٔ هدایت، آورده شده‌اند.



آ



ب

شکل ۳-۳۱- آ. نمایش فرکانسی مثال ۳-۱۲؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه. ب. پاسخ پله سامانهٔ تحت هدایت

در ادامه بیایید انتخابِ دیگری از $\widehat{\omega}_i$ را بگیریم یعنی آن را مساویِ $\widehat{\omega}_d$ می‌گیریم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\widehat{\omega}_i = \widehat{\omega}_d = 3 \qquad (۸۱-۳)$$

در نتیجه :

$$\hat{\beta} = 20 \quad \rightarrow \quad \hat{k} = 0.23\,(1 + 12^2) = 33 \qquad (۸۲-۳)$$

و جبران‌ساز به صورتِ سری:

$$33\left(\frac{\left(\frac{1}{3}s+1\right)^2}{\frac{1}{3}s\left(\frac{1}{60}s+1\right)}\right) \qquad (۸۳-۳)$$

و جبران‌ساز به صورتِ موازی:

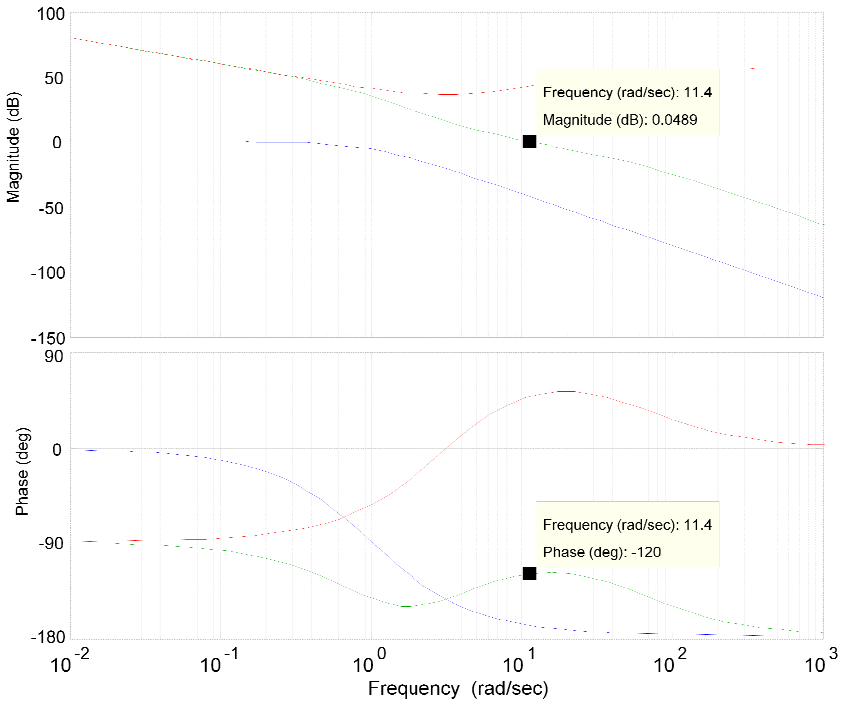
$$T_i = \hat{T}_i + \hat{T}_d = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad (۸۴-۳)$$

$$\omega_d = \widehat{\omega}_i + \widehat{\omega}_d = 3 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad T_d = \frac{1}{6} \qquad (۸۵-۳)$$

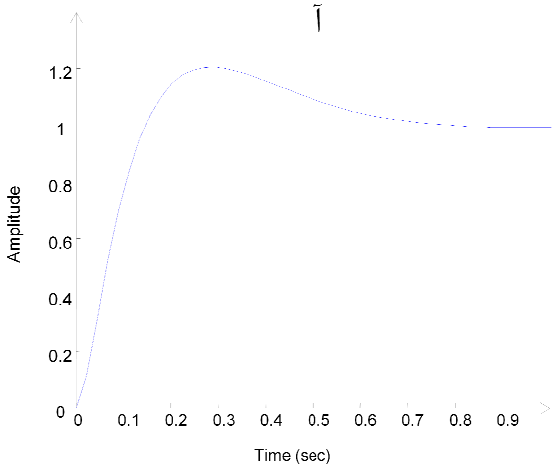
$$k = \hat{k}\frac{T_i}{\hat{T}_i} = \ 40\frac{{}^{2}/_{3}}{{}^{1}/_{3}} = 80 \qquad (۸۶-۳)$$

$$\rightarrow \quad H_{PID}(\mathrm{s}) = \ 80\left(1 + \frac{1}{\frac{2}{3}s} + \frac{\frac{1}{6}s}{\frac{1}{60}s+1}\right) \qquad (۸۷-۳)$$

در شکل ۳-۳۲ نمایش بودی جبران‌ساز، حلقهٔ هدایت و نتیجهٔ هدایت، آورده شده‌اند.



آ



ب

شکل ۳-۳۲- آ. نمایش فرکانسی مثال ۳-۱۲؛ آبی: سامانه تحت هدایت، سبز: سامانه جبرانساز، قرمز بهره حلقه و سیاه نتیجه حلقه. ب. پاسخ پله نتیجه حلقه

همان گونه که انتظار می‌رفت تفاوت اصلی به همان کمی پس‌فازیِ باقیمانده بر می‌گردد که در پاسخ پله خود را با فراجهش بیشتر نمایش داده است. دقت کنید که در عوض، در ناحیهٔ عبور بهرهٔ بیشتری داریم و لذا خطای هدایت برای این فرکانس‌ها به مراتب کاهش یافته است! این موضوع در پاسخ پله خود را به این ترتیب نشان می‌دهد که شما میراییِ پاسخِ مناسب‌تری را تجربه می‌کنید.

ستایش از آن خداوند است

مراجع

[1] Bode, H W. Network analysis and feedback design. Van Nostrand Reinhold, 1945.

[2] D' Azzo, J J, and C H Houpis. Linear Control System analysis and design. 5nd Edition. New York: McGraw-Hill, 1995

[3] Dorf, C Richard. Modern Control Systems. 10nd Edition. Prentice Hall, 2004.

[4] MacFarlane, A.G.J. Frequency response methods in control system. 1979: IEEE Press.

[5] Ogata, K. Modern control engineering. 5nd Edition. Prentice Hall, 2009.

[6] Ziegler, J G, and N B Nichols. "Optimum setting for automatic controllers." ASME Trans 64 (1942): 759-768.

[7] Vidyasagar, M. Nonlinear Systems Analysis. 2nd Edition. SIAM, 2002.